Halvsyntaktiske modeller og normale setningslogiske modalsystemer

Morten Rognes

1971

(Bearbeidet og renskrevet høsten 2008)

© Morten Harboe Rognes 2008

§1 Innledning

Hensikten med dette skrift er å bruke det vi her kaller "halvsyntaktiske modeller" for modale setningslogiske språk ved undersøkelsen og analysen av modalsystemene T, B, S4 og S5. Den typen setningslogiske språk det arbeides med her inneholder de følgende elementer: For det første en tellbart uendelig mengde med setningsvariabler. Dernest inneholder språket de vanlige setningslogiske konnektivene. Det bør noteres at bare ¬ og → brukes som primitive konnektiver. De andre rent setningslogiske konnektivene innføres ved definisjon. Endelig inneholder språket nøvendighetsoperatoren L. Mulighetsoperatoren M er definert ved hjelp av L som ¬L¬.

La oss først gi en redegjørelse for det modell-begrep vi benytter her. Med en halvsyntakstisk modell forstår vi et ordnet par <Δ,R> der Δ er en sannhetsmengde og R er en mengde av formler som er pålagt visse krav. En sannhetsmengde er en formelmengde der vi for enhver setningsvariabel p i språket har at enten p eller ¬p er med i mengden. Videre er negasjonen av en formel med hvis og bare hvis formelen selv ikke er med i mengden. Det kreves enn mer at konjunksjonen av to formler er med i formelmengden dersom og bare dersom begge konjunktene er med. Endelig kreves det at en formel av typen Lα er med i sannhetsmengden Δ hvis og bare hvis α er med i R. Dette er de grunnleggende kravene som avgrenser klassen av halvsyntaktiske modeller.

I en slik modell er det meningen, i alle fall når de omtales i dette skrift, at Δ representerer mengden av alle sanne utsagn og R representerer mengen av nødvendig sanne utsagn. Gitt en slik forståelse av komponentene, er det ganske naturlig at vi krever at Lα må være blandt de sanne utsagn dersom α er med i R og dermed representerer et nødvendig sant utsagn. Har man logisk nødvendighet i tankene er det også rimelig å kreve at R Inkl Δ. Dette representerer det krav at alle nødvendige sannheter er sanne. Naturligvis er det andre krav som det er rimelig å pålegge de halvsyntaktiske modellene.

For det første virker det ytterst rimelig å hevde at dersom α og α→β er nødvendig sanne utsagn så må også β være det. Dette innebærer at vi krever at R er lukket under modus ponens. Videre skulle det være klart at alle de setningslogisk gyldige formlene i L, PC*, uttrykker nødvendige sannheter. Vi bør derfor kreve at også de er med i L. Dette virker ukontroversielt.

Det virker også svært rimelig å hevde at alle setninger av formen Lα→α uttrykker nødvendige sannheter og at man bør kreve at alle disse utsagnene er med i L. Det samme gjelder alle formlene av typen L(α→β) →(Lα→Lβ). La oss betegne mengden av alle de formlene vi så langt har nevnt med L*. Det virker da ganske ukontroversielt å tenke seg at L* Inkl R. Er nå K* den minste formelmengden som inneholder L* og som dessuten er slik at Lγ→Lδ er med i K* om δ er med i K* virker det heller ikke direkte urimelig å kreve at denne mengden skal være inkludert i R. Endelig, er en formel α med i L* synes det heller ikke urimelig å kreve at L(n)(α→α)[1] for hvert naturlig tall n er med i R.

Hvis vi stanser opp på dette punkt og betrakter mengden av de halvsyntakstiske modellene som oppfyller kravene vi så langt har nevnt , utgjør denne klassen av modeller en mengde som svarer til modalsystemet T. Er α en formel som er et teorem i T kan man vise at α er med i Δ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R> som oppfyller de nevnte krav. Det omvendte vil også bli bevist: Er α et element i Δ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R>

1 Merk at L(n) er induktivt definert slik: Er n=0 er L(n)α rett og slett α. Vi setter så at L(n+1)α = L(L(n)α). Man ser derfor at for eksempel L(5)α er formelen L...Lα der L...L representerer en sekvens av 5 L'er.

© Morten Harboe Rognes 2008

som er med i denne mengden er α et teorem i modalsystemet T.

Det er mulig å legge ytterligere krav på modellene i den klassen vi nå har avgrenset. Det virker ikke helt urimelig å hevde at alle instanser av formelen α→LMα uttrykker nødvendige sannheter. Legger vi alle disse formlene inn i mengden L* ovenfor får vi en litt trangere mengde av modeller som svarer til systemet B.

Tenker man seg at mengden L*, som består av de setningslogisk gyldige formler og alle formlene av typen Lα→α og L(α→β) → (Lα→Lβ), utvidet, ikke med α→LMα, men istedet alle formler av typen Lα→LLα og lar ellers alt være som ovenfor får man en klasse med modeller som svarer til systemet S4.

Krever man endelig at mengden L*, som består av de setningslogisk gyldige formler og alle formlene av typen Lα→α og L(α→β) → (Lα→Lβ), utvides med alle formler av typen Lα→LLα samt Mα →LMα, får man en modellklasse som svarer til modalsystemet S5.

Så meget av forberedene art om den type av modeller som vi skal arbeide med i dette skrift. La oss nå gi en oversikt over innholdet i dette arbeid. I den neste paragrafen, §2, gjør vi rede for alle de grunnleggene syntaktiske begrepene vi trenger i forbindelse med det setningslogiske språket L vi arbeider med her. Vi definerer også presist det rent setningslogiske systemet som vi legger til grunn i dette skrift og gir en syntaktisk definisjon av de setningslogisk gyldige formlene i språlet L. I §3 gir vi en presis definisjon av begrepet halvsyntaktisk modell og innfører de hjelpebegrepene vi trenger i forbindelse med dem. Spesielt definerer vi hva som menes at en formel er gyldig. Vi viser også detaljert at alle PC-gyldige formler i L er gyldige i enhver halvsyntakstisk modell. I §3.1 beskriver vi en alternativ versjon av de halvsyntaktisk modellene og viser detaljert at den nye versjonen er ekvivalent med den gamle.

§4 inneholder en definisjon av hva som menes med en S-konsistent og maksimalt S-konsistent mengde, der S er et av de systemene vi arbeider med i dette skrift. I dette avsnittet formulerer vi også Lindenbaumsteorem om at enhver konsistent formelmengde kan utvides til en maksimalt konsistent mengde. Vi nevner også de vanligste satser om maksimalt konsistente mengder som vi har bruk for. Disse satsene er nødvendige for de fullstendighetsbevis vi senere skal gi. I §5 definerer vi først standardversjonene av de fire modalsystemene T, B, S4 og S5. Dernest formulerer vi fire alernative versjoner av systemene, T*,B*, S4* og S5* som er mer hensiktsmessige å arbeide med fra vårt perspektiv siden de bare har en slutningsregel, nemlig modus ponens. I §6 avgrenser vi presist fire klasser av halvsyntaktiske modeller som svarer til modalsystemene T, b, S4 og S5. Vi viser at alle teoremene i hvert system er gyldige i alle modeller i den korresponderende modellklasse. Dessuten blir det bevist at alle systemene er komplette.

I §7 - §12 undersøker vi sammenhengen mellom de halvsyntaktisk modellene for de modalsystemene vi har valgt å undersøke og Kripke-modellene for de samme systemene. La |T| betegne klassen av alle de halvsyntaktiske modellene for systemet T, mengden av T-modeller. Anta m er en halvsyntakstisk modell. Den vil da være et ordnet par. π;1(m) betegner i så fall den første komponenten i dette paret og π;2(m) betegner den andre komponenten. Er m,m' to T-modeller sier vi at m' er underordnet m hvis og bare hvis vi har π;2(m) Inkl π;1(m'). Denne underordnethetsrelasjonen betegner vi med μ. Er m en T-modell betegner Γ(m) den minste mengden med T-modeller som inneholder m og som er lukket under μ. man kan vise at dersom m er en halvsyntaktisk T-modell vil faktisk M= <m, Γ(m), μ> være en Kripke-modell som svarer til m Man kan nå vise at enhver formel i L er med i π;1(m) hvis og bare hvis den er gyldig i denne Kripke T-modellen M. Fra dette kan man slutte at enhver formel som er gyldig i alle Kripke T-modeller også holder i alle T-modeller. Ved hjelp av dette resultat og de satser om fullstendighet og gyldighet vi beviser i forbindelse med T kan

© Morten Harboe Rognes 2008

man så trekke den slutning at enhver formel i L er Kripke-t-gyldig hvis og bare hvis den er T-gyldig, det vil si holder i alle halvsyntaktiske T-modeller. I §9 - §12 viser vi helt tilsvarende resultater for systemene B, S4 og S5.

De halvsyntaktiske modellene som vi beskjeftiger oss med i dette skrift er egentlig ikke ment som et alternativ til den tradisjonelle Kripke-semantikk. Men de viser at det er mulig å nærme seg de tradisjonelle modalsystemene på en annen måte en den Kripke gjør. Dessuten viser den at man kan vise klassiske resultater på en litt annen måte en tidligere. Dessuten er det intet ved de halvsyntaktiske modellene som krever at man gir sin tilslutning til eksistensen av mulige verdener. Dette er som man bør forvente. Nærmer man seg et emne fra forskjellige synsvinkler vil resultatet ofte være nye innsikter.

§2 Grunnleggende syntaktiske begreper

Vi tar vårt utgangspunkt i et enkelt setningslogisk språk L hvor de primitive symbolene er: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,..... , videre (ii) de setningslogiske konnektivene → og ¬, som står for henholdsvis materiell implikasjon og negasjon, samt (iii) den monadiske modaloperatoren L. I tillegg til disse uttrykkene inngår de vanlige parantestegnene i L

De velformede formlene i L, vi betegner mengden av velformede formler med Fm(L), er avgrenset ved de følgende regler: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel. (b) Er α og β velformede formler så er også (¬α), (α→ β) og Lα velformede formler. (c) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (a) og (b) er velformede formler.

Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene, disjunksjon, konjunksjon og bikondisjonal, samt mulighetsoperatoren M, defineres disse på følgende vis:

Definisjon 2.1

$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$
$\alpha \& \beta = \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$
$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$
$M\alpha = \neg L\neg\alpha$

Med et setningslogisk aksiom i L forstår vi enhver formel som er en instans av ett av de følgende skjemaer:

(S1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(S2) $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(S3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

I de logikkene vi skal betrakte er det bare en slutningsregel, nemlig modus ponens. Som bekjent er dette

MP $\vdash \alpha \& \vdash(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \vdash \beta$

Med mengden av setningslogisk gyldige formler i L forstår vi den minste mengden av formler i L som inneholder alle instanser av skjemaene S1 - S3 og som er lukket under modus ponens. Vi sier at formelen α er bevisbar i setningslogikken, i symboler "PC|- α" hvis og bare hvis α er den siste formelen i en rekke av formler der hver formel enten er en instans av et av skjemaene S1 - S3 eller er sluttet fra to foregående formler i rekken ved hjelp av modus ponens. Man innser lett at α en setningslogisk gyldig formel hvis og bare hvis den er bevisbar i setningslogikken.

© Morten Harboe Rognes 2008

§3 Modellteori for setningslogiske systemer i L. Halvsyntaktiske modeller

Med en sannhetsmengde, Δ, i L forstår vi en formelmengde Δ som oppfyller de følgende krav:
(i) For enhver setningsbokstav p i L har man enten at p eller ¬p er med i Δ. (ii) Er α en vilkårlig formel i L har man at (¬α)êΔ hvis og bare hvis det ikke er slik at α er med i Δ. (iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man at (α→β)êΔ hvis og bare hvis man har at dersom α er med i Δ så er β det også.

Vi skal nå definere hva vi forstår med en halvsyntaktisk modell for L. Vi formulerer denne definisjonen formelt slik:

Definisjon 3.1 Med en *halvsyntaktisk* modell M forstås et ordnet par <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(i) Δ er en sannhetsmengde
(ii) R er en, muligens tom, mengde med formler i L
(iii) (Aα)(αêFm(L) → (Lα)êΔ ↔ αêR)

I det følgende skal vi kalle det som her har blitt omtalt som halvsyntaktiske modeller for modeller[2]. En formel α sies å være PC- gyldig dersom vi har for enhver halvsyntaktisk modell
M=<Δ,R> at αêΔ. Vi betegner klassen av halvsyntaktiske modeller med |PC|. Hvis en formel er α holder i enhver modell som er med i |PC|, det vi si er PC-gyldig, skriver vi "|PC| ⊨ α"

Før vi går videre innfører vi projeksjonsfunksjonen π på ordnete par ved de følgende stipulasjoner: Er a= <x,y> setter vi π;1(a) = x og π;2(a) =y. Det er med andre ord slik at dersom a er et ordnet par betegner π;1(a) den første komponenten i paret og π;2(a) den andre komponenten i paret. Trivielt har vi da at a= <π;1(a), π;2(a)> om a er et par.

Det er ganske lett å se at alle setningslogisk gyldige formler i L er gyldige i den betydning som er angitt her. Vi skal gi et detaljert bevis nedenfor selvom det er svært enkelt. Det er med andre ord slik at dersom α er en setningslogisk gyldig formel så har man at αêΔ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R>. Legger man forskjellige krav på de halvsyntaktiske modellene vil det naturigvis være flere formler i L som blir gyldige enn bare de setningslogiske teoremene i L.

Teorem 3.2 Er α en vilkårlig formel i L gjelder:

(a) PC|- α → |PC| ⊨ α
(b) |PC| ⊨ α ↔ PC |- α

Bevis for (a): Vi skal gi bevis for gyldighetsdelen i denne satsen her. For det første må vi vise at alle instanser av de setningslogiske aksiomskjemaene S1 - S3 er PC-gyldige. Når det gjelder disse skjemaene vil det derfor være nok å vise at de alle holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(a) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Vi har åpenbart αêΔ → (βêΔ → αêΔ). Fra dette følger, siden Δ er en sannhetsmengde αêΔ → (β→α)êΔ. Herav har vi så, igjen fordi Δ er en sannhetsmengde at

2 Ganske enkelt fordi ordet uttrykket "modell" er kortere en "halvsyntaktisk modell". Når ordet "modell" brukes i det følgende skulle det uansett gå klart frem fra sammenhengen at det må dreie seg om den typen strukturer som er avgrenset ved Definisjon 3.1.

© Morten Harboe Rognes 2008

$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))\hat{e}\Delta$. Dette viser at S1 holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(b) Anta $M=<\Delta, R>$ er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Det skulle være klart at vi på basis av ren setningslogikk har at
(1) $(\neg(\beta\hat{e}\Delta)\rightarrow\neg(\alpha\hat{e}\Delta))\rightarrow(\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow\beta\hat{e}\Delta)$. Siden Δ er en sannhetsmengde har vi
(2) $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta\leftrightarrow(\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow\beta\hat{e}\Delta)$ og (3) $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L)\rightarrow(\neg(\alpha\hat{e}\Delta)\leftrightarrow(\neg\alpha)\hat{e}\Delta))$. Fra (1) - (3) kan man slutte: (4) $((\neg\beta)\hat{e}\Delta\rightarrow(\neg\alpha)\hat{e}\Delta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav: $((\neg\beta)\rightarrow(\neg\alpha))\hat{e}\Delta\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$. Herav følger i sin tur, når man tar hensyn til kravet (iii) i definisjon av sannhetsmengde, at $S2\hat{e}\Delta$. Det følger at S2 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(c) Anta $M=<\Delta,R>$ er en halvsyntaktisk modell og at α,β,γ er vilkårlige formler i L. Da har vi åpenbart $(\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow(\beta\hat{e}\Delta\rightarrow\gamma\hat{e}\Delta))\rightarrow((\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow\beta\hat{e}\Delta)\rightarrow(\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow\gamma\hat{e}\Delta))$. Ved å anvende kravet (iii) i definisjonen av sannhetsmengde ser man at vi har:

$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\hat{e}\Delta\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)\hat{e}\Delta)$ og derfor
$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\hat{e}\Delta\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))\hat{e}\Delta$. Herav følger så i sin tur, igjen ved hjelp av kravet (iii) i definisjonen vi ga av sannhetsmengde, at $S3\hat{e}\Delta$. Siden modellen M og formlene α,β,γ var vilkårlig valgt, viser dette at enhver instans av S3 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(d) Anta C er en delmengde av de halvsyntaktiske modellene. Vi skal vise at dersom α og $\alpha\rightarrow\beta$ holder i alle modeller i C så gjør β det også, med andre ord skal vi vise at modus ponens bevarer C-gyldighet. Dette impliserer umiddelbart at dersom α og $\alpha\rightarrow\beta$ holder i alle S0.5-modeller vil også β gjøre det. Anta α og $\alpha\rightarrow\beta$ holder i enhver modell i mengden C. Dette innebærer at

(1) $(AM)(M\hat{e}C\rightarrow\alpha\hat{e}\pi;1(M))$ og
(2) $(AM)(M\hat{e}C\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\pi;1(M))$

Anta $M=<\Delta,R>$ er en vilkårlig i C. Da har vi fra (1) og (2) at
$\alpha\hat{e}\Delta$ & $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra det at $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$ at vi har $\alpha\hat{e}\Delta\rightarrow\beta\hat{e}\Delta$. Fra dette og det at $\alpha\hat{e}\Delta$ følger $\beta\hat{e}\Delta$. Siden M var et vilkårlig element i C har vi altså bevist: $(AM)(M\hat{e}C\rightarrow\alpha\hat{e}\pi;1(M))$, med andre ord at også β holder i alle modeller i C.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for det første punktet i Teorem 3.1. QED.

§3.1 En alternativ definisjon av de halvsyntaktiske modellene

Det er mulig å formulere den semantiske teorien vi har presentert ovenfor på en litt annen måte. Med en verditilordning for L forstår vi en funksjon υ som tilordner enhver setningsvariabel enten tallet 1 eller 0. naturligvis er det meningen at tallet 1 representerer sannhetsverdien 1 og 0 sannhetsverdien usann. Med en halvsyntaktisk modellstruktur forstår vi så et ordnet par $<\upsilon,R>$ der υ er en verditilordning for L og R en en delmengde av mengen av formler i L, Fm(L). Er $m=<\upsilon,R>$ en slik modellstruktur kan vi definere hva som menes med at en formel α i L er sann i modellstrukturen m. Vi bruker "$<\upsilon,R>\models\alpha$" som forkortelse for "$\alpha$ er sann i modellstrukturen $<\upsilon,R>$". Uttrykket er definert induktivt på lengden av formler i L på følgende måte:

Definisjon 3.1.1 Anta L er et setningslogisk språk for modallogikk og at $<\upsilon,R>$ er en modellstruktur for L. Da setter vi om $\alpha\hat{e}Fm(L)$:

(i) $<\upsilon,R>\models\alpha\ \leftrightarrow\ \upsilon(p)=1$ om α er en utsagnsvariabel i L
(ii) $<\upsilon,R>\models\alpha\ \leftrightarrow\ \neg(<\upsilon,R>\models\beta)$ om $\beta\hat{e}Fm(L)$ og $\alpha=\neg\beta$
(iii) $<\upsilon,R>\models\alpha\ \leftrightarrow\ (<\upsilon,R>\models\beta\rightarrow<\upsilon,R>\models\gamma)$ om $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$

© Morten Harboe Rognes 2008

(iv) $\langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \beta \hat{e} R$ om $\alpha = L\beta$

En formel α i L sies å være gyldig hvis og bare hvis den er sann i enhver halvsyntaktisk modellstruktur <υ,R>

Det er en relativt triviell sak å se at den semantiske teorien vi har presentert her er ekvivalent med den teorien vi presenterte ovenfor. De følgende to satser viser dette:

Teorem 3.1.2 Anta M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Definer en verditiordning υ ved å sette υ(p) =1 hvis og bare hvis pêQ. Definer den halvsyntaktiske modellstrukturen m ved
m=<υ,R>. Da har man for alle formler α i L at $\alpha \hat{e} Q \leftrightarrow \langle \upsilon,R\rangle \models \alpha$

Vi utelater beviset for denne sats. Det dreier seg om et ytterst trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L. Som man ser kan vi for enhver halvsyntaktisk modell konstruere en halvsyntaktisk modellstruktur som verifiserer akkurat de samme formlene.

Det omvendte er, som man umiddelbart skjønner også mulig. Vi har:

Teorem 3.1.3 Anta m=<υ,R> er en halvsyntaktisk modellstruktur for L. La Q være den minste formelmengden X i L som inneholder alle de setningsvariablene p der vi har υ(p) =1 og alle Lβ der βêR og som dessuten oppfyller de følgende krav: Er β,γ formler i L har vi at ¬βêX hvis og bare hvis β ikke er med i X og (β→γ) er med i X hvis og bare hvis βêX → γêX. Da har vi:

(i) M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell.

(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \langle \upsilon,R\rangle \models \alpha \leftrightarrow \alpha \hat{e} Q$

Også når det gjelder denne satsen utelater vi beviset siden det dreier seg om et trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L.

Når det gjelder en halvsyntaktisk modell <υ,R> er det meningen at komponenten R skal representere alle de utsagnene i L som er er nødvendig sanne. Dette stemmer med valusajonsregelen for L som sier at υ(Lα) = 1 hvis og bare hvis αêR. Dette innebærer at en formel av typen "Det er logisk nødvendig at α" er sann hvis og bare hvis α er blandt de formler som er nødvendig sanne i L. Dette virker naturlig. Det er imidlertid et krav som det er naturlig å stille til de halvsyntaktiske modellene dersom L skal tolkes som logisk nødvendighet. Kravet er at alle formlene i L, som jo representerer nødvendige sannheter også er sanne, med andre ord må det kreves at (+) R Inkl Q om <Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Det tilsvarende kravet for halvsyntaktiske modellstrukturer vil være $(A\alpha)(\alpha \hat{e} R \rightarrow \upsilon(\alpha)=1)$. Vi skal kalle halvsyntaktiske modeller som oppfyller dette kravet for "sterke" halvsyntaktiske modeller.

Vi kaller den typen modeller vi her har avgrenset for "halvsyntaktiske" fordi den ene komponenten i en slik modell er en mengde med formler. Formler er syntaktiske størrelser.

§4 Maksimalt konsistente mengder.

I det følgende lar vi S stå for et hvilket som helst system som er en utvidelse av det setningslogiske systemet ovenfor.

Anta Δ er en formelmengde i L. Vi sier da at den er *S-konsistent* hvis og bare hvis det ikke er slik at det finnes formler β;1,....,β;n (n>=1) slik at S |- ¬(β;1&...&;n). En mengde med formler Δ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis vi har (i) at Δ er S-konsistent og (ii) at det ikke finnes noen formel β i L som ikke er med i Δ slik at ΔU{β} er S-konsistent.

© Morten Harboe Rognes 2008

En maksimalt S-konsistent formelmengde er altså en S-konsistent formelmengde som ikke kan utvides med noen nye formler uten at resultatet blir en formelmengde som ikke er S-konsistent. Vi skal ta for gitt den følgende sats, Lindenbaums lemma, som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en maksimalt S-konsistent mengde.

Teorem 4.1 Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L finnes det en mengde Γ med formler i L som er maksimalt S-konsistent og der Δ er inkludert i Γ.

Når det gjelder beviset for denne satsen kan man konsultere Hughes & Cresswell [1], side 150 -152. Vi trenger også det følgende teorem som viser hva slags egenskaper maksimalt konsistente mengder har. Heller ikke her gir vi noe detaljert bevis, men alt som er nevnt i satsen følger lett fra de satsene som er detlajert bevist i Hughes & Cresswell [1] på side 152 - 154.

Teorem 4.2 Anta Δ er en formelmengde i L som er maksimalt S-konsistent. Da gjelder følgende:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\neg\alpha)\hat{e}\Delta))$
(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta \ v \ (\neg\alpha)\hat{e}\Delta)$
(iii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\neg\alpha)\hat{e}\Delta \leftrightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta)))$
(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow S \vdash \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$
(v) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow \alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$
(vi) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)))$
(vii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \leftrightarrow \beta \hat{e} \Delta)))$
(viii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha v \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \ v \ \beta \hat{e} \Delta)))$
(ix) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow ((\alpha \& \beta)\hat{e}\Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ \beta \hat{e} \Delta)))$
(x) $S \vdash \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta$

Man ser fra denne satsen at dersom Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man Δ også er en sannhetsmengde. Dette følger fra punktene (i), (iii) og (v).

Vi har nå samlet sammen de begrepsdannelsene og hjelpesetningene vi trenger for å kunne levere et bevis for fullstendighetsdelen til Teorem 3.3. Vårt bevis er som følger:

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) $\neg(PC \vdash \alpha)$. Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at $\{\neg\alpha\}$ er en PC-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt PC-konsistent formelmengde Γ slik at (2) $\{\neg\alpha\}$ Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) $R = Mg(\alpha: \alpha \hat{e} Fm(L) \ \& \ L\alpha \hat{e} \Gamma)$

Definer M ved å sette: (4) $M = \langle \Gamma, R \rangle$. Vi skal vise at M er en halvsyntaktisk modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.1. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Gamma \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$. Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell og den derfor er en modell i klassen |PC|. Vi har nå vist at dersom $\neg(PC \vdash \alpha)$ så finnes det en semisyntaktisk modell $M = \langle \Delta, R \rangle$ slik at $\neg(\alpha \hat{e} \Delta)$. Dette kan formuleres slik:

(6) $\neg(PC \vdash \alpha) \rightarrow (EM)(M \hat{e} |PC| \ \& \ \neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M)))$. Vi har siden π;1(M) er en sannhetsmengde at

(7) $\neg(EM)(M \hat{e} |PC| \ \& \ \neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M))) \leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |PC| \rightarrow \neg\neg(\alpha \hat{e} \pi;1(M)))$
$\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |PC| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

Det følger fra (6) og (7) at: $(AM)(M \hat{e} |PC| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M)) \rightarrow PC \vdash \alpha$. Dette viser at punkt (b) i

© Morten Harboe Rognes 2008

Teorem 3.2 holder. **QED.**

§5 Reaksiomatiseringer av de normale setningslogiske modalsystemene T, B, S4 og S5.

I det følgende skal betegne vi mengden av alle rent setningslogisk gyldige formler med PC*. Vi føyer til stjernen slik at man ikke blander sammen formelmengden PC* med selve systemet PC det ble beskrevet i §2. Man har naturlig vis at PC* = {α: αêFm(L) & PC |- α}. Vi bemerker også at man rent mekanisk kan avgjøre om en formel i L er med i PC* eller ikke. Den vanlige metoden med å konstruere sannhetsverditabeller kan brukes i denne forbindelse.

Det setningslogiske modalsystemet T defineres vanligvis slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:

(1) $L\alpha \rightarrow \alpha$

(2) $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$

Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:

MP $\vdash \alpha \;\&\; \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \rightarrow \quad \vdash \beta$

og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:

RL $\vdash \alpha \quad \rightarrow \quad \vdash L\alpha$

Som man ser sier denne regelen at dersom formelen α er et teorem i systemet så er også formelen Lα et teorem. Man kan definere systemet T som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og nødvendighetsregelen.

Systemet B, det såkalte Brouwerske system, er definert som T bortsett fra at man til aksiomene i T legger til alle instanser i L av formelen:

(3) $\alpha \rightarrow L(M\alpha)$

Når det gjelder systemet S4 er dette igjen definert som T, men mengden av aksiomer i T må utvides med alle instanser av formelen

(4) $L\alpha \rightarrow L(L\alpha)$

Når det gjelder systemet S5 er dette definert som systemet S4 bortsett fra at mengden av alle aksiomer i S4 må utvides med alle instanser i L av formelen

(5) $M\alpha \rightarrow L(M\alpha)$

Man ser fra dette at aksiomene til S5 er alle de setningslogisk gyldige formlene i L, samt alle instanser av formlene (1), (2) , (4) og (5). Slutningsregler i alle systemene er modus ponens og nødvendighetsregelen.

Før vi går videre innfører vi den følgende konvensjon.

Definisjon 5.1 Vi setter om nêN:

$L(0)(\alpha) = \alpha$

$L(n+1)(\alpha) = L(L(n)(\alpha))$

Man ser fra denne definisjonen at L(1)(α) rett og slett er Lα. Dessuten at L(2)(α) = LLα og så videre.

Det er nå hensikten å formulere visse reaksiomatiseringer av systemene T, B, S4 og S5 som bare har modus ponens som slutningsregel. For dette formål finner vi det hensiktsmessig å avgrense visse formelklasser.

Definisjon 5.2:

(a) K(t) er den minste mengden X Inkl Fm(L) som oppfyller følgende krav:

© Morten Harboe Rognes 2008

(i) Mg(α: αêFm(L) &PC|- α) Inkl X
(ii) Er α en vilkårlig formel i L har man: Lα → α êX
(iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man: (L(α→β) → (Lα → Lβ))êX
(iv) Er γ en vilkårlig formel i L og er δ êX så er (Lγ → Lδ) êX

(b) K(l) er den minste formelmengden X i L som i tillegg til kravene ovenfor også oppfyller kravet:
(v) Er α en vilkårlig formel i L har man (α → L(Mα))êX

(c) K(q) er den minste formelmengden X i L som oppfyller kravene (i) -(iv) men som også oppfyller det følgende krav:
(vi) Er α en vilkårlig formel i L har man (Lα → L(Lα))êX

(d) K(r) er den minste formelmengden X i L som oppfyller kravene (i) -(iv) men som også oppfyller det følgende krav:
(vii) Er α en vilkårlig formel i L har man (Lα → L(Lα))êX
(viii) Er α en vilkårlig formel i L har man (Mα → L(Mα))êX

Man ser at formelmengdene K(t), K(l), K(q) og K(r) svarer til henholdsvis T, B, S4 og S5.

Utvider man nå disse formelmengdene med alle formler i mengden {L(n)(α→α: nêN} får man mengdene K(t);∞, K(l);∞, K(q);∞ og K(r);∞. Formelt kan disse mengdene defineres slik:

Definisjon 5.3
(a) K(t);∞ = K(t) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)
(b) K(l);∞ = K(l) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)
(c) K(q);∞ = K(q) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)
(d) K(r);∞ = K(r) U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) & nêN)

Vi kan nå definere våre nye aksiomatiseringer av T, B, S4 og S5. Vi lar T* (B*, S4*, S5*) være den minste formelmengden X i L som inkluderer K(t);∞ (K(l);∞, K(q);∞, K(r);∞) og som er lukket under modus ponens. At disse nye systemene er ekvivalente med våre tidligere versjoner fremgår av det følgende teorem:

Teorem 5.4 Man har:
(a) T* = Mg(α: αêFm(L) & T |- α)
(b) B* = Mg(α: αêFm(L) & B |- α)
(c) S4* = Mg(α: αêFm(L) & S4 |- α)
(d) S5* = Mg(α: αêFm(L) & S5 |- α)

Bevis: Vi gir bare et detaljert bevis for (a) siden beviset for de andre påstandene fremkommer fra beviset for (a) med bare noen små endringer.

(I) Vi viser først inklusjonen mot høyre i (a), med andre ord at enhver formel i T* er et teorem i T. Det er da nødvendig å vise at alle formlene i K(t);∞ er teoremer i T. I sin tur innebærer dette at man må bevise (1) (An)(nêN → T|- L(n)(α→α)). Det vises ved induksjon på N. Er n=0 har man L(n)(α→α) = α→α. Men α→α er en setningslogisk gyldig formel og derfor et teorem i T. I dette tilfelle har vi derfor T |-α. Anta T|- L(n)(α→α), med andre ord at satsen holder for n. Ved hjelp av nødvendighetsregelen kan vi da slutte T|- L(L(n)(α→α)). I ys av Definisjon 5.1 innebærer dette T|- L(n+1)(α→α). Ved induksjon følger så (1).

For å vise at alle aksiomene i T* er teoremer i T er det nå nødvendig å vise:
(2) K(t) Inkl Mg(α: αêFm(L) & T|- α). Siden K(t) er definert induktivt er det først

© Morten Harboe Rognes 2008

nødvendig å vise at alle formlene i PC*, og alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→ Lα→Lβ er teoremer i T. Men alle disse formlene er også aksiomer i T og derfor teoremer i T. Det eneste vi derfor må gjøre er å å vise at dersom γ er en vilkårlig formel i L og T|- δ, så har man også
T |- Lγ →Lδ. Anta derfor at T|- δ. Ved hjelp av nødvendighetsregelen har vi da (3) T |-Lδ. Siden Lδ → (Lγ → Lδ) er en setningslogisk gyldig formel har vi T|- Lδ → (Lγ → Lδ). Fra dette, (3) og modus ponens følger selvfølgelig at T|- Lγ → Lδ.

Dermed har vi vist at (4) (Aα)(αêFm(L) → αêK(t);∞ → T|-α). På samme måte ser man ett at K(l);∞ (K(q);∞, K(r);∞) er inkludert blandt teoremene i B (S4, S5).

Tilslutt bemerker vi at mengden av teoremer i T er lukket under modus ponens. Fra dette og dette og (4) følger at T* er inkludert i mengden av teoremer i T. På tilsvarende vis kan man konkludere med at B* (S4*, S5*) er inkludert i mengden av teoremer i B (S4, S5).

(II) Det er også nødvendig å vise at mengden av teoremer i T er inkludert i T*. Vi må da først vise at aksiomene i T er teoremer i T*. Det er klart at PC*, mengden av alle de setningslogisk gyldige formlene i L er teoremer i T*. Vi har jo PC* Inkl K(t);∞ Inkl T* i lys av definisjonen av T*. Videre er det klart at alle formler av typen Lα → α og L(α→B) → (Lα → Lβ) er med i K(t);∞ og derfor er aksiomer i T*. Dette viser at alle aksiomene i T er med i T*. Vi bemerker at man på nøyaktig samme måte kan vise at alle aksiomene i B, S4 og S5 er med i henholdsvis B*, S4* og S5*.

For å vise at alle teoremene i T er med i T* vil det nå være tilstrekkelig å vise at (1) T* er lukket under modus ponens og at vi har (2) (Aα)(αêT* → LαêT*). Det først er trivielt siden T* per definisjon er lukket under modus ponens. Det andre krever bevis. T* er induktivt definert. Man må derfor vise (2) ved induksjon på T*. Det være tilstrekkelig å vise følgende:

(3) (Aα)(αêK(t);∞ → LαêT*)

(4) (Aα)(A)(Lα êT* & L(α→β)êT* → Lβ êT*)

Vi viser først at (4) holder. Anta for vilkårlige formler α,β at (5) LαêT* og L(α→β)êT*. Siden
L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i T*, siden det er med i K(t), har vi (L(α→β) →Lα→Lβ)êT*. Fra dette og (5) følger, siden T* er lukket under modus ponens, at (Lα→Lβ)êT*. Men fra dette og (5) følger ved nok en anvendelse av modus ponens at LβêT*. Dette viser at (4) holder.
For å vise (3) vil det, i lys av definisjonen av K(t);∞ være tilstrekkelig å bevise:

(6.1) αêMg(L(n)(α→α): nêN)→ LαêT*

(6.2) (Aα)(αêK(t) → LαêT*)

Det første er enkelt. Anta αêMg(L(n)(α→α):αêFm(L) & nêN). Da finnes det nêN slik at α=L(n)(β→β) for en eller annen formel β. Da har vi åpenbart at L(α) = L(L(n)(β→β))êK(t);∞ Inkl T*. Dette viser at (6.1) holder.

La oss så se på (6.2). Anta αêK(t). Siden K(t) er induktivt definert må påstanden vises ved induksjon på K(t). Anta δ er en tautologi, en formel av typen Lα→α eller en formel av typen L(α-→β)→(Lα→Lβ). Da har vi (L(α→α) → Lδ)êK(t) og derfor åpenbart at (L(α→α) → Lδ)êT*. Siden L(α→α) er med i T* og T* er lukket under modus ponens følger i dette tilfelle at LδêT*. Dermed er basistrinnet bevist. Anta nå for vilkårlig formel δ at δêK(t). Da har vi igjen at (L(α→α) → Lδ)êK(t) og derfor at (L(α→α) → Lδ)êT*. Siden L(α→α) er med i T* og T* er lukket under modus ponens følger derfor også i dette tilfelle at LδêT*. Dermed har vi vist riktigheten av (6.2). Det følger at vi har gitt et fullstendig bevis for at mengden av teoremer i T er inkludert i T*.

Man ser lett hvordan beviset for (1) og (2) ovenfor kan modifiseres slik at vise at B*

© Morten Harboe Rognes 2008

(S4*, S5*) er lukket under modus ponens og at dersom αêB* (αêS4*, αêS5*) så har man LαêB* (LαêS4*, LαêS5*). Vi konkluderer derfor med at satsen holder. **QED.**

§6 Modellteori for de normale setningslogiske modalsystemene. Gyldighet og fullstendighet.

Vi har nå avgrenset systemene T, B , S4 og S5 presist. Vi har også definert de korresponderende, ekvivalente systemene T*, B*, S4* og S5*. Det vi nå ønsker å gjøre er å tilordne hvert av disse systemene en klasse av halvsyntaktiske modeller. Dernest vil vi vise at alle teoremene i et system holder i alle modeller i den modellklassen systemet har blitt tilordnet. Dessuten ønsker vi å vise at det motsatte holder, nemlig at dersom en formel holder i alle modellene i den modellklasse som er tilordnet et system så er formelen også et teorem i systemet.

Vi avgrenser først mengden av T-modeller for språket L.

Definisjon 6.1 En T-modell M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \,\&\, \alpha \hat{e} R \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$

(ii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \,\&\, (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R))$

(iii) $K(t);\infty$ Inkl R

Man ser altså at dersom en halvsyntaktisk modell <Δ,R> skal være en T-modell må R være lukket under modus ponens, R være inkludert i Δ - noe som innebærer at enhver nødvendig sannhet er en sannhet - og endelig må alle formlene i $K(t);\infty$ være inkludert i R.

Klassen av B -modeller (S4, S5-modeller) for L defineres nøyaktig likt bortsett fra at kravet (iii) må endres til at formlene i $K(l);\infty$ ($K(q);\infty$, $K(r);\infty$) er inkludert i R. Dette er oppsummert i den følgende definisjon:

Definisjon 6.2 En B-modell (S4-modell, S5-modell) M for språket L er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> for L som oppfyller de følgende krav:

(i) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \,\&\, \alpha \hat{e} R \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$

(ii) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \,\&\, (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R))$

(iii) $K(l);\infty$ Inkl R ($K(q);\infty$ Inkl R, $K(r);\infty$ Inkl R)

En formel α i L er T-gyldig (B-, S4-, S5-gyldig) hvis og bare hvis vi har for enhver T-modell (B-, S4-, S5-modell) M= <Δ,R> at αêR. Betegner vi klassen av T-modeller med |T|, og tilsvarende klassen av B- (S4-,S5-) modeller med |B| (|S4|, |S5|) kan denne definisjonen formaliseres slik:

Definisjon 6.3 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) α er T-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |T| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

(ii) α er B-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |B| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

(iii) α er S4-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |S4| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

(iv) α er S5-gyldig $\leftrightarrow (AM)(M \hat{e} |S5| \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$

Vi viser først det følgende gyldighetsteorem for de kalkyler vi har introdusert:

Teorem 6.4 (Gyldighetsteorem). Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

© Morten Harboe Rognes 2008

(i) $\alpha \hat{e} T^* \rightarrow \alpha$ er T-gyldig
(ii) $\alpha \hat{e} B^* \rightarrow \alpha$ er B-gyldig
(iii) $\alpha \hat{e} S4^* \rightarrow \alpha$ er S4-gyldig
(iv) $\alpha \hat{e} S5^* \rightarrow \alpha$ er S5-gyldig

Bevis: Vi gir bare et detaljert bevis for (i). Underveis vil vi imidlertid antyde hvordan beviset kan endres slik at man også får bevis for de resterende punkter i satsen.

Siden T* er den minste formelmengden i L som inneholder $K(t);\infty$ og som er lukket under modus ponens er det tilstrekkelig å vise to ting, nemlig

(1) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha$ er T-gyldig & $(\alpha \rightarrow \beta)$ er T-gyldig $\rightarrow \beta$ er T-gyldig)
(2) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} K(t);\infty \rightarrow \alpha$ er T-gyldig)

Vi viser først at (1) holder. Anta derfor at (3) α er T-gyldig & $(\alpha \rightarrow \beta)$ er T-gyldig. Anta $M=<\Delta,R>$ er en vilkårlig T-modell. Fra dette, (3) og definisjonen av T-gyldighet følger at (4) $\alpha, (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Men siden M er en T-modell følger det at Δ er en sannhetsmengde. Dette faktum og (4) impliserer at $\beta \hat{e} \Delta$. Siden M var en vilkårlig T-modell følger det at β holder i alle T-modeller, med andre ord at β er T-gyldig. Dette viser at (1) holder. Man ser lett at dette resonnementet fortsatt holder om vi erstatter "T-gyldighet" med "B-gyldighet" ("S4-gyldighet", "S5-gyldighet") og snakker om B-modeller (S4-modeller, S5-modeller) i stedet for T-modeller.

La oss så ta for oss (2). Anta (4) $\alpha \hat{e} K(t);\infty$ for vilkårlig α. Vi har da i lys av definisjonen av $K(t);\infty$ at α enten er et element i $Mg(L(n)(\beta \rightarrow \beta)$: $n \hat{e} N)$ eller et element i K(t). Vi ser derfor på to tilfelle:

Tilfelle (a) $\alpha \hat{e} Mg((n)(\beta \rightarrow \beta):\beta \hat{e} Fm(L)$ & $n \hat{e} N)$. Da har vi at $\alpha = L(n)(\beta \rightarrow \beta)$ for noe naturlig tall n og en eller annen formel β. Anta $M=<\Delta,R>$ er en vilkårlig T-modell. Da har vi at $K(t);\infty$ Inkl R. Det følger ved hjelp av definisjonen av $K(t);\infty$ at (5) $Mg(L(n)(\beta \rightarrow \beta)$: $n \hat{e} N)$ Inkl R. Er n=0 har vi at $\alpha = (\beta \rightarrow \beta)$ som er en åpenbart setningslogisk gyldig formel. Da har vi siden, Δ er en sannhetsmengde, at $(\beta \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Har vi at n>0 har vi ved hjelp av (5) at $L(n-1)(\beta \rightarrow \beta) \hat{e} R$. Siden M er en T-modell og derfor en halvsyntaktisk modell har vi at (6) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Delta \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$. Fra dette
og (5) følger så $L(L(n-1)(\beta \rightarrow \beta)) = L(n)(\beta \rightarrow \beta) = \alpha \hat{e} \Delta$. Men $M=<\Delta,R>$ var en vilkårlig T-modell. Det følger at α er T-gyldig også i dette tilfellet.

Tilfelle (b) Anta (7) $\alpha \hat{e} K(t)$. Vi ønsker å vise at α er T-gyldig. For dette formål viser vi at følgende holder:

(8) K(t) Inkl $Mg(\alpha$: $\alpha \hat{e} Fm(L)$ & α er T-gyldig).

Fra dette og (7) følger åpenbart at α er T-gyldig. Det vil derfor være helt tilstrekkelig å bevise (8). Siden K(t) er induktivt definert må vi vise dette ved induksjon på K(t).

Basistrinn: Anta δ enten er en formel som er setningslogisk gyldig, eller er $L\alpha \rightarrow \alpha$ eller er $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$ for noen α,β. Er δ en formel som er setningslogisk gyldig følger det fra Teorem 3.2 at δ holder i alle halvsyntaktiske modeller og derfor også i alle T-modeller. I dette tilfellet er derfor δ T-gyldig. Anta $\delta = L\alpha \rightarrow \alpha$. La $M=<\Delta,R>$ være en vilkårlig T-modell. Da har vi per definisjon at (9) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} R \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$. Siden vi også har at enhver halvsyntaktisk modell oppfyller kravet (10) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Delta \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$ følger det at $L\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta$. Men siden Δ må være en sannhetsmengde siden M er en T-modell følger $(L\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$. Siden M var en vilkårlig T-modell viser dette at $\delta = L\alpha \rightarrow \alpha$ er T-gyldig. Anta $\delta = (L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta))$. Anta igjen at $M=<\Delta,R>$ er en vilkårlig T-modell. I lys av Definisjon 6.1 har vi da at M oppfyller kravet:

© Morten Harboe Rognes 2008

(11) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R \rightarrow \beta \hat{e} R))$

Siden enhver T-modell også oppfyller kravet (10) ovenfor følger:

(12) $L(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow L\beta \hat{e} \Delta)$ Fra dette kan vi så slutte, siden Δ er en sannhetsmengde at $L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta) \hat{e} \Delta$. Siden M var en vilkårlig T-modell følger det at δ holder i alle T-modeller. Det følger at α er T-gyldig.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for basistrinnet.

Induksjonstrinn: For å godtgjøre (8) må vi også vise det følgende:

(13) Har man $\delta \hat{e} K(t)$, og at δ er T-gyldig, gjelder også at $(L\gamma \rightarrow L\delta)$ er T-gyldig

Anta derfor at (14) $\delta \hat{e} K(t)$, og at (15) δ er T-gyldig. Vi skal vise at $(L\gamma \rightarrow L\delta)$ er T-gyldig. Anta for reduktio ad absurdum at $L\gamma \rightarrow L\delta$ ikke er T-gyldig. Da vil det finnes en T-modell $M=<\Delta,R>$ der vi har: (16) $\neg ((L\gamma \rightarrow L\delta) \hat{e} \Delta)$. Siden Δ er en sannhetsmengde følger fra dette at (17) $L\gamma \hat{e} \Delta \ \& \ \neg(L\delta \hat{e} \Delta)$. Siden M er en T-modell har vi at $K(t);\infty$ Inkl R. Dette innebærer at i lys av definisjonen av $K(t);\infty$ at (18) K(t) Inkl R. Fra dette og (14) har man umidelbart at (19) $\delta \hat{e} R$. Siden M er en T-modell har vi at (10) ovenfor holder. Fra dette og (19) følger $L\delta \hat{e} \Delta$ som åpenbart strider mot den siste konjunkten i (17). Det følger at $L\gamma \rightarrow L\delta$ er T-gyldig. Dette viser at induksjonstrinnet holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (8) og vist at det første punktet i satsen holder.

Når det gjelder beviset for (b) i satsen har vi allerde antydet hvordan man kan vise at modus ponens bevarer B-gyldighet. For å vise at alle teoremene i B* er B-gyldige vil det derfor være tilstrekkelig å vise at $K(l);\infty$ er inkludert i mengden av alle de B-gyldige formlene i L. Nå er $K(l);\infty$ definert på samme måte som $K(t);\infty$ bortsett fra, man ser dette når man studerer Definisjon 5.2, har inkludert alle instanser av formelen $\alpha \rightarrow LM\alpha$ i K(l). For å vise at alle formlene i K(l) er B-gyldige kan man derfor resonnere nøyaktig som ovenfor. Det eneste man behøver å vise i tillegg er at $\alpha \rightarrow LM\alpha$ er B-gyldig. La oss gjøre det. Anta $M=<\Delta,R>$ er en vilkårlig B-modell. Da har vi ved hjelp av Definisjon 6.2 at $K(l);\infty$ Inkl R. Siden $(\alpha \rightarrow LM\alpha) \hat{e} K(l);\infty$ følger det at (20) $(\alpha \rightarrow LM\alpha) \hat{e} R$. Men siden M er en B-modell oppfyller M følgende to krav:

(21) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\alpha \hat{e} R \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta))$ og

(22) $(A\beta)(A\beta)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Delta \leftrightarrow \alpha \hat{e} R))$

Fra (21) og (22) kan man slutte (23) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta))$. Fra (20) og (22) følger: $L(\alpha \rightarrow LM\alpha) \hat{e} \Delta$. Fra dette og (23) har man så $(\alpha \rightarrow LM\alpha) \hat{e} \Delta$. Men $M=<\Delta,R>$ var en vilkårlig B-modell. Det følger at $\alpha \rightarrow LM\alpha$ er B-gyldig.

På tilsvarende vis kan man vise at det karakteristiske S4- aksiom $L\alpha \rightarrow LL\alpha$ er S4-gyldig, og at de to aksimene som legges til T for å få S5, nemlig $L\alpha \rightarrow LL\alpha$ og $M\alpha \rightarrow LM\alpha$ er S5-gyldige. Dette skulle være tilstrekkelig for å godtgjøre at også punktene (b)-(d) i satsen holder.

Dette avslutter vårt bevis. **QED.**

Det neste steg i våre undersøkelser av de halvsyntaktiske modellene er å vise at systemene T, B, S4 og S5 er fullstendige med hensyn på de gyldighetskriteriene vi har fastsatt i Definisjon 6.3.

Vi skal vise at det følgende teorem holder:

© Morten Harboe Rognes 2008

Teorem 6.5 Anta Γ er en T- (B-, S4 -, S5 -) konsistent mengde av formler i L. Da gjelder at det finnes en modell Mê |T| (|B|, |S4|, |S5|) slik at Γ Inkl π;1(M)

Bevis: Vi gir et detaljert bevis for denne satsen når det gjelder systemet T. For de andre systemene, B, S4 og S5, vil vi bare skissere hvordan beviset for T kan endres slik at man får bevis for de andre systemene.

Først noen forberedelser. Vi definerer induktivt en sekvens av formelmengder <t(n)>/nêN/ på følgende måte:

(a) t(0) er den formelmengden som inneholder alle de setningslogsk gyldige formlene i L, samt alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→(Lα →Lβ).

(b) t(n+1) er t(n) utvidet med alle mulige formler av typen Lγ → Lδ der δêt(n) og γêFm(L). Dette avslutter definisjonen. Vi viser først:

(1) K(t) = UN/nêN/(t(n)),

med andre ord at K(t) er unionen av alle de diverse t(n) ettersom n gjennomløper mengden av de naturlige tall, N.

Vi viser først inklusjonen mot høyre. Dette skjer ved induksjon på K(t). Basistrinn: vi har umiddelbart at t(0) Inkl UN/nêN/(t(n)). Induksjonstrinn: Anta δêUN/nêN(t(n)). Da har vi αêt(k) for noe kêN. men da følger (Lγ → Lδ)êt(k+1) i lys av klausul (b) i definisjonen nyss gitt. et følger at (Lγ→Lδ)êUN/nêN/(t(n)). Dernest tar vi for oss inklusjonen mot venstre. Denne vises ved inuksjon på n. Basistrinn: I lys av definisjonen av K(t) har vi åpenbart at t(0) Inkl K(t). Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at t(n) Inkl K(t). Anta αêt(n+1) for vilkårlig formel α. a har vi enten at αêt(n), og i så fall har vi åpenbart ifølge induksjonshypotesen at αêK(t). Eller så har vi at α= (Lγ→Lδ) der δêt(n). ved hjelp av induksjonshypotesen følger da δêK(t). Men siden vi da i lys av definisjonen av K(t) har (Lγ→Lδ)êK(t) følger at αêK(t). Vi har nå vist at t(n+1) Inkl K(t).

Fra basistrinnet og det vi har vist under induksjonstrinnet, følger ved induksjon at UN/nêN/(t(n)) Inkl K(t).

Etter disse forberedelsene kan vi ta fatt på selve beviset. Anta (2) Γ er en T-konsistent formelmengde i L. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt T-konsistent formelmengde Δ slik at (3) Γ Inkl Δ. Definer R ved å sette:

(4) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ)

Definer M ved å sette: (5) M= <Δ,R>. Vi skal vise at M er en halvsyntaktisk modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.1. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi, i lys av Teorem 4.2, at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (4) at (6) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΔ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. Det som nå må gjøres er å vise at M oppfyller kravene til en T-modell. I lys av definisjonen som vi tidligere har gitt av T-modell ser man at det vil være tilstrekkelig å godtgjøre følgende påstander:

(7.1) (Aα)(αêFm(L) →(αêR → αêΔ))

(7.2) (Aα)(αβ)(α,βêFm(L) → (αêR & (α→β)êR → βêR))

(7.3) K(t);∞ Inkl R

Vi skal vise at disse påstandene holder under punkt (a) - (c) nedenfor.

(a) Anta (8) αêFm(L) & αêR for vilkårlig α. Fra dette og (6) følger LαêΔ. Siden Δ er en maksimalt konsistent mengde har vi ved hjelp av Teorem 4.2 at (9) T|-α → αêΔ for alle formler α. Nå har vi åpenbart at T|- Lα→α.. Fra dette og (9) følger (10) (Lα→α)êΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger derfor fra (10) og det at LαêΔ at αêΔ. Dette viser at (7.1) holder.

© Morten Harboe Rognes 2008

(b) Anta for vilkårlige formler at (11) αêR & (α→β)êR. Ved hjelp av (6) kan fra dette slutte at
(12) LαêΔ & L(α→β)êΔ. Nå har vi (13) T|- L(α→β)→Lα→Lβ. Fra dette og Teorem 4.1 kan man slutte (14) (L(α→β)→Lα→Lβ)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra (14) at L(α→β)êΔ & LαêΔ → LβêΔ. Fra dette og (12) følger så LβêΔ. Fra dette og (6) følger endelig βêR. Dette viser at påstanden (7.2) holder.

(c) Vi har at K(t);∞ Inkl T*. Dette innebærer, siden T* er identisk med klassen av alle teoremer i T, at (Aα)(αêK(t)∞ → T|-α). Siden Δ er en T-maksimalt konsistent mengde følger da at (15) K(t);∞ Inkl Δ ved hjelp av Teorem 4.2. Vi må imidlertid vise at K(t);∞ Inkl R.

Vi viser først at

(16) Mg(L(n)(α→α):αêFm(L) & nêN) Inkl R.

Anta derfor for vilkårlig β at (17) βêMg(L(n)(α→α):αêFm(L) & nêN). Da har vi at β=L(n)(α→α) for noe nêN og en eller annen formel α. Da har vi åpenbart

(18) Lβ = L(L(n)(α→α))= L(n+1)(α→α)ê Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) &nêN)

Men i lys av (15) har vi:

(19) Mg(L(n)(α→α): αêFm(L) &nêN) Inkl K(t);∞ Inkl Δ

Fra (18) og (19) følger: Lβ êΔ og derfor siden <Δ,R> er en T-modell at βêR. Dette viser at (16) holder.

Det gjenstår å vise at (20) K(t) Inkl R. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(21) (An)(nêN → t(n) Inkl R)

Fra dette følger åpenbart UN/nêN/(t(n)) Inkl R. Men herav kan vi ved hjelp av (1) ovenfor slutte at (20) holder. La oss derfor vise (21):

Anta n er et vilkårlig tall og δ en vilkårlig formel slik at (22) δêt(n). Fra definisjonen av mengdesekvensen <t(n)>/nêN/ fremgår det da at (Lγ →Lδ)êt(n+1) for enhver formel γ. Mer spesielt følger at (23) (L(α→α) →Lδ)êt(n+1). Siden vi har:

t(n+1) Inkl UN/nêN/(t(n)) =K(t) Inkl Δ følger:

(24) (L(α→α) →Lδ)êΔ. Nå har vi åpenbart siden K(t);∞ Inkl Δ at
(25) L(α→α)êMg(L(n)(α→α): αêFm(L) &nêN) Inkl K(t);∞ Inkl Δ og derfor L(α→α)êΔ. Men fra dette og (24) følger, siden Δ er en sannhetsmengde, at LδêΔ. Siden (6) holder kan vi slutte at δêR. Men n,δ var vilkårlige objekter slik at (22) holdt. Det følger at (21) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (7.3). Dette viser at satsen holder for systemet T's vedkommende.

Når det gjelder systemet B kan man gjøre følgende endringer. Man erstatter overalt i beviset ovenfor "T" med "B", videre erstatter man alle forekomster av "K(t)" og "K(t);∞"med henholdsvis "K(l)" og "K(l);∞". Tilslutt må man endre den første delen av definisjonen av t(n)
slik at man endrer frasen "samt alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→(Lα →L)." til "samt alle formler av typen Lα→α , L(α→β)→(Lα →L) og α→LMα." Gjør man disse endringene skulle det fremkomme et tilsvarende bevis for komplettheten til B.

Tilsvarende bemerkninger kan gjøres når det gjelder systemet S4. Man erstatter overalt i beviset ovenfor "T" med "S4", videre erstatter man alle forekomster av "K(t)" og "K(t);∞" med henholdsvis "K(q)" og "K(q);∞". Tilslutt må man endre den første delen av definisjonen av t(n) slik at man fjerner frasen "samt alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→(Lα →L)." og erstatter den med "samt alle formler av typen Lα→α , L(α→β)→(Lα →L) og Lα→LLα." Gjør man disse endringene skulle det fremkomme ordrett et bevis for komplettheten til S4.

© Morten Harboe Rognes 2008

Når det gjelder S5 erstatter overalt i beviset ovenfor "T" med "S5", videre erstatter man alle forekomster av "K(t)" og "K(t);∞"med henholdsvis "K(r)" og "K(r);∞". Tilslutt må man endre den første delen av definisjonen av t(n) slik at frasen "samt alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→(Lα →L)." endres til "samt alle formler av typen Lα→α , L(α→β)→(Lα →L), Lα→LLα og Mα →LMα"

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED.**

Som et korollar til Teorem 6.5 har man:

Teorem 6.6 Anta α er en formel i L. Da gjelder:

(i) $(AM)(M\hat{e}|T| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M)) \rightarrow T \vdash -\alpha$

(ii) $(AM)(M\hat{e}|B| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M)) \rightarrow B \vdash -\alpha$

(iii) $(AM)(M\hat{e}|S4| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M)) \rightarrow S4 \vdash -\alpha$

(iv) $(AM)(M\hat{e}|S5| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M)) \rightarrow S5 \vdash -\alpha$

Bevis: (i) Anta $\neg (T|-\alpha)$. Da har vi at $\{\neg\alpha\}$ er en T-konsistent formelmengde. Ved hjelp av Teorem 6.5 kan man da slutte at det finnes en T-modell M slik at $\{\neg\alpha\}$ Inkl $\pi;1(M)$. Da har vi at $(\neg\alpha)\hat{e}\pi;1(M)$, og følgelig, siden $\pi;1(M)$ er en sannhetsmengde, at $\neg (\alpha\hat{e}\pi;1(M))$. Det følger derfor at $(EM)(M\hat{e}|T| \,\&\, \neg(\alpha\hat{e}\pi;1(M)))$. Da har vi naturligvis: $\neg (AM)(M\hat{e}|T| \rightarrow \alpha\hat{e}\pi;1(M))$. Dette viser at (i) holder. Punkten (ii) - (iv) bevises på nøyaktig samme måte, man behøver bare å erstatte "T" med henholdsvis "B", "S4" og "S5". **QED.**

Vi skal nevne endel andre forhold. En formelmengde Δ er lukket under T- (B-, S4-, S5-) konsekvens hvis og bare hvis vi har for vilkårlige formler α,β at dersom $\alpha\hat{e}\Delta$ og $(\alpha\rightarrow\beta)$ er et T-(B-, S4-,S5-) teorem så er også $\beta\hat{e}\Delta$. Man kan vise følgende i denne forbindelse:

Teorem 6.7 Anta $M=<\Delta,R>$ er en T- (B-, S4-, S5-) modell. Da har man at R er lukket under T- (B-, S4-, S5-) konsekvens.

Bevis: Anta $M=<\Delta,R>$ er en T-modell. da har man per definisjon:

(1) $\alpha\hat{e}R \,\&\, (\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}R \rightarrow \beta\hat{e}R$ og

(2) $K(t);\infty$ Inkl R

Ved induksjon på T* følger da at (3) T* Inkl R. Anta nå (4) $\alpha\hat{e}R \,\&\, T \vdash -(\alpha\rightarrow\beta)$. Fra den siste konjunkten følger at $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}T^*$ og derfor ved hjelp av (3) at $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}R$. Fra dette, (1) og den første konjunkten i (4) følger $\beta\hat{e}R$. Dette viser at R er lukket under T-konsekvens.

Helt analoge resonnementer kan gjennomføres for systemene B, S4 og S5. **QED.**

Det følgende kompakthetsteorem kan også bevises ved hjelp av fullstendighetsteoremet, Teorem 6.5

Teorem 6.8 (Kompakthetsteorem) Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen T- (B-, S4-, S5-) modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en T- (B-, S4-, S5-) modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Bevis: Vi har i kraft av Teorem 6.5 at en formelmengde Γ er T-konsistent hvis og bare hvis det finnes en T-modell M slik at Γ Inkl π;1(M). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at Δ er T-konsistent hvis og bare hvis enhver endelig delmengde av Δ er T-konsistent. Anta Δ er T-konsistent. Da er det i lys av definisjonen av T-konsistent formelmengde opplagt at hver

© Morten Harboe Rognes 2008

delmengde, og derfor enhver endelig delmengde av Δ er T-konsistent. Anta på den annen side at enhver endelig delmengde av formelmengden Δ er T-konsistent, men at Δ likevel er T-inkonsistent. Da vil det ikraft av definisjonen av T-konsistens i §4 finnes visse formler β;1,...,β;nêΔ slik at T |- ¬(β;1&...&β;n). Da er det imidlertid åpenbart at {β;1,...β;n} er en endelig og T-inkonsistent delmengde av Δ. Men dette er utelukket. Det følger at Δ må være T-konsistent. **QED.**

Teorem 6.9 Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle T (B,S4,S5) -modeller M der Δ Inkl π;1(M) hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i T (B, S4, S5)

Bevis: (a) Anta Δ er en formelmengde og at α er en formel i L. Da er det ganske opplagt at kondisjonalen mot venstre i satsen holder. For anta (1) T |- (β;1&.... &β;n → α) og (2) β;1,...,β;nêΔ. Anta M er en vilkårlig T-modell der vi har (3) Δ Inkl π;1(M). Fra (1) og gyldighetsteoremet for T følger da (4) (β;1&.... &β;n → α) êπ;1(M). Fra (2) og (3) følger videre (5) β;1,...,;β;n êπ;1(M). Siden π;1(M) er en sannhetsmengde følger fra (4) og (5) at βêπ;1(M). Siden M var en vilkårlig T-modell har vi vist at αêπ;1(M) for alle T (B,S4,S5) -modeller M der Δ Inkl π;1(M). Man ser at dette resonnementet fremdeles holder om man erstatter "T" over alt med "B" (S4", "S5")

(b) Anta igjen at Δ er en formelmengde i L og at α er en formel i L. Anta at

(1) α êπ;1(M) for enhver T-modell M der vi har Δ Inkl π;1(M).

Vi skal da vise at høyresiden i bikondisjonalen i teoremet holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det ikke finnes β;1,...,β;nêΔ der vi har T |- (β;1 &...& β;n → α). Da kan det ikke finnes β;1....β;nêΔ slik at T |- ¬(β;1&....& β;n & ¬α). Fra definisjonen av T-konsistent formelmengde følger det da at {β;1,...,β;n,¬α} er en T-konsistent formelmengde for alle β;1,...,β;nêΔ. Ved hjelp av fullstendighetsteoremet, Teorem 6.5, kan vi da konkludere med at det for enhver delmengde {β;1,...,β;n} Inkl Δ finnes en T-modell M' slik at {β;1,...,β;n, ¬α} Inkl π;1(M'). Dette innebærer at for enhver endelig del Γ av ΔU{¬α} finnes det en T-modell T* slik at Γ Inkl π;1(M*). Da må det etter kompakthetsteoremet, Teorem 6.8 finnes en T-modell M** slik at ΔU{¬α} Inkl π;1(M**). Da har vi imidlertid at ¬(αêπ;1(M**)) og Δ Inkl π;1(M**) for en eller annen T-modell M**. Dette strider mot (1)

Man ser at dette resonnementet fremdeles holder selvom man erstatter systemet T med et av systemene B, S4 eller S5. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED.**

Teorem 6.10 Anta Δ er en formelmengde som er lukket under T (B, S4, S5) -konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver T (B,S4, S5) -modell M der Δ Inkl π;1(M)

Bevis: (a) Anta at forutsetningen i teoremet holder. Anta (1) αêΔ . La M være en vilkårlig T-modell der vi har Δ Inkl π;1(M). Fra dette og (1) følger trivielt at αêπ;1(M). Vi har derfor αêπ;1(M) for enhver T -modell M der Δ Inkl π;1(M).

(b) Anta igjen at forutsetningene holder. Men anta nå at αêπ;1(M) for enhver T -modell M der Δ Inkl π;1(M). Fra dette siste følger ved hjelp av Teorem 6.9 at det finnes formler β;1,...,β;nêΔ slik at T|- (β;1&....&β;n → α). Siden vi etter forutsetningen har at Δ er lukket under -konsekvens følger umiddelbart at αêΔ.

Man ser umiddelbart at disse resonnementene fremdeles holder om "T" overalt erstattes med enten "B", "S4" eller "S5". **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

§7 Kripke-modeller for systemene T, B, S4 og S5

I de neste avsnitt er hensikten å se nærmere på sammenhengen mellom vanlige Kripke-modeller for L og den typen halvsyntaktiske modeller som vi har innført her. I denne paragrafen skal vi bare definere nærmere de typene av Kripke-modeller vi vil arbeide med[3].

Definisjon 7.1 (a) En *Kripke T - struktur* er et ordnet triple <G,K,R> som oppfyller de følgende krav: (i) K er en ikke-tom mengde. (ii) G er et element i K (iii) R er en refleksiv relasjon over K. (b) En *Kripke B-struktur* er en Krike T-struktur <G,K,R> der man i tillegg krever at R er en symmetrisk relasjon over K. (c) En *Kripke S4 -struktur* er en Krike T-struktur <G,K,R> der man i tillegg krever at R er en transitiv relasjon over K. (d) En *Kripke S5-struktur* er en Kripke T-struktur <G,K,R> der man i tillegg krever at R er både en symmetrisk relasjon og en transitiv relasjon over K.

Man ser fra denne definisjonen at enhver Kripke T-struktur er en Kripke B-struktur og også en Kripke S4-struktur. Enhver struktur av de to sistnevnte typene vil i sin tur være en Kripke S5-struktur.

Definisjon 7.2 Med *en verditilordning φ assosiert med strukturen <G,K,R>*, der K er en ikke-tom mengde, G et element i K og R en relasjon over K, forstår vi en funksjon φ som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K

Vi definerer så hva som menes med en Kripke modell for henholdsvis T, B, S4 og S5

Definisjon 7.3 Men *Kripke T (B, S4, S5)-modell for L* forstås en struktur <φ,G,K,R> der <G,K,R> er en Kripke K (B, S4, S5) -struktur og φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>.

Definisjon 7.4 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

(ii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ ¬α ↔ ¬(<M,w> ⊨ α)

(iii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(iv) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ wRw &(Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

Etter disse forberedelsene kan vi nå definere hva som menes med at en formel er Kripke T (B,S4, S5)-gyldig. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 7.5 Anta αêFm(L). Da sier vi at α er Kripke T (B,S4, S5)-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver Kripke T (B, S4, S5)-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

3 De semantiske teoriene for systemene T, B, S4 og S5 som det gjøres rede for i dette avsnittet er hentet fra Kripke [1]. Definisjonene vi gir av modellstruktur, modell og gyldighet er i et vesentlige som i Kripke [1], side 69-70, men med visse mindre endringer av overfladisk natur.

© Morten Harboe Rognes 2008

Det er en rutineøvelse å vise at den følgende sats holder. Vi hopper derfor over beviset:

Teorem 7.6 Anta α er en formel i L. Er α et teorem i T (B, S4, S5) har vi at α er Kripke T (B, S4, S5) -gyldig.

§8 Om sammenhengen mellom Kripke T-modeller og halvsyntaktiske T -modeller

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom det vi tidligere kalte T-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke T-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke T-gyldig så er den også T-gyldig. Siden Teorem 7.6 sier at ethvert teorem i T er Kripke T-gyldig og vi tidligere har vist at enhver T-gyldig formel er et teorem i T (Teorem 6.6) følger det at enhver formel er Kripke T-gyldig hvis og bare hvis den er T-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at T er fullstendig med hensyn på Kripke T-gyldighet. Dette beviset har en litt annen struktur enn det som for eksempel er gitt i Hughes & Cresswell [1][4]

Vi minner om at mengden av alle havsyntaktiske T-modeller betegnes med |T|. Vi definerer en relasjon μ mellom T-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê| T| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at T-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en T-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |T| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har dersom for alle T-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX. Vi gjør oppmerksom på at vi i det følgende lar I betegne identitetsrelasjonen. I er altså Mg(<x,y>: x=y)

Vi definerer dessuten, om m er en T-modell, relasjonen R;m Inkl |T|X|T| ved å sette:

(+) R;m = (μ U I) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en refleksiv relasjon over Γ(m) og at dersom <m;1,m;2>êR;m så har vi enten at m;1 er identisk med m,2, eller at m;2 er underordnet m;1. I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m).

Teorem 8.1 Anta m;0 er en T-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi

Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en T-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at vi enten har m=m' eller at m' er underordnet m. Vi skiller derfor mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): m=m'. Siden m er en T- modell har vi at den oppfyller kravet:
(4) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;1(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;1(m). Men siden m=m' følger αêπ;1(m'). Dette er åpenbart det vi ønsker.

Tilfelle (ii): m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m'). Siden m er en T-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet:
(6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjnalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

4 Se Hughes & Cresswell [1], side 149 - 159.

© Morten Harboe Rognes 2008

(6) $(Am')(m'\hat{e}\Gamma(m;0) \& \langle m,m'\rangle \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(m'))$

Siden $\langle m,m'\rangle \hat{e} R;(m;0) \leftrightarrow m=m' \vee \langle m,m'\rangle \hat{e}\mu$ følger fra dette at

(7) $(Am')(m'\hat{e}|T| \& \langle m,m'\rangle \hat{e}\mu \rightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(m'))$ Dette innebærer i sin tur at

(8) $(Am')(m'\hat{e}|T| \ \& \ \pi;2(m)$ Inkl $\pi;1(m') \rightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(m'))$

Men siden m er en T-modell er $\pi;2(m)$ lukket under T-konsekvens i henhold til Teorem 6.7. Fra dette forhold, (8) og Teorem 6.10 kan vi slutte at (9) $\alpha \hat{e}\pi;2(m)$. Men siden m er en T-modell oppfyller den kravet: $(A\beta)(\beta \hat{e} Fm(L) \rightarrow (L\beta \hat{e}\pi;1(m) \leftrightarrow \beta \hat{e}\pi;2(m)))$. Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: $L\alpha \hat{e}\pi;1(m)$.

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at T-gyldighet er ekvivalent med Kripke T-gyldighet.

Teorem 8.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |T|. Sett per definisjon:

(i) $G= m;0$

(ii) $K= \Gamma(m;0)$ og

(iii) $R = R;(m;0)$

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) $\varphi(p) = Mg(m: m\hat{e}\Gamma(m;0) \& p\hat{e}\pi;1(m))$

Sett tilslutt (v) $M= \langle \varphi, G,K,R\rangle$. Da har vi:

(a) M er en Kripke T-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

$(Aw)(w\hat{e}K \rightarrow (\langle M,w\rangle \models \alpha \leftrightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(w)))$

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at $\langle G,K,R\rangle$ er en Kripke T- modellstruktur. Man har at $G=m;0\hat{e}\Gamma(m;0)=K$ i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at $R;(m;0)$ er en refleksiv relasjon over $K=\Gamma(m;0)$ i lys av definisjonen av R;m. Videre skulle det være klart på basis av definisjonen (iv) i teoremet at φ er en verditilordning assosiert med strukturen $\langle G,K,R\rangle$ når man studerer Definisjon 7.2. Det følger derfor at $M=\langle \varphi,G,K,R\rangle$ er en Kripke T-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi $w\hat{e}\Gamma(m;0)$.

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

$\langle M,w\rangle \models \alpha \leftrightarrow \langle M,w\rangle \models p \leftrightarrow w\hat{e}\varphi(p) \leftrightarrow p\hat{e}\pi;1(w)$

(ii) Er $\alpha = \neg\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$\langle M,w\rangle \models \neg\beta \leftrightarrow \neg(\langle M,w\rangle \models \beta)$

$\leftrightarrow \neg(\beta \hat{e}\pi;1(w))$ (Her benytter vi induksjonshypotesen)

$\leftrightarrow (\neg\beta)\hat{e}\pi;1(w)$ (Siden $\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(w)$

(iii) Er $\alpha=(\beta\rightarrow\gamma)$ for visse formler β,γ har vi:

$\langle M,w\rangle \models (\beta\rightarrow\gamma) \leftrightarrow (\langle M,w\rangle \models \beta \rightarrow \langle M,w\rangle \models \gamma)$

$\leftrightarrow (\beta \hat{e}\pi;1(w) \rightarrow \gamma \hat{e}\pi;1(w))$ (Etter induksjonshypotese)

$\leftrightarrow (\beta\rightarrow\gamma)\hat{e}\pi;1(w)$ ($\pi;1(w)$ er en sannhetsmengde)

$\leftrightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(w)$

(iv) Er $\alpha = L\beta$ for en eller annen formel β har vi:

$\langle M,w\rangle \models L\beta \leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}K \& \langle w,w'\rangle \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \langle M,w'\rangle \models \alpha)$

$\leftrightarrow (Aw')(w'\hat{e}\Gamma(m;0) \& \langle w,w'\rangle \hat{e} R;(m;0) \rightarrow \alpha \hat{e}\pi;1(w')$

© Morten Harboe Rognes 2008

Men i ved hjelp av Teorem 8.1 har vi:

(Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) → αêπ;1(w')) ↔ Lαêπ;1(w)

Det følger at <M,w> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(w).

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 8.2 er det nå lett å vise:

Teorem 8.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke T-gyldig er α også T-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke T-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig T-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke T-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 8.2. Det vil si sett per definisjon:

(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 8.2 at:

(3) (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w))) herav:
(4) <M,G> ⊨ α ↔ αêπ;1(G) ↔ αêπ;1(m;0)

Men α er etter (1) Kripke T-gyldig og M er en Kripke T-modell. Det følger da at <M,G> ⊨α. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i T er Kripke T-gyldig. Videre har vi fra Teorem 6.6 at enhver T-gyldig formel er et teorem i T. Fra dette og Teorem 8.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 8.4 En formel α i L er Kripke T-gyldig hvis og bare hvis den er T-gyldig.

La oss nå gå over til en tilsvarende undersøkelse av systemet B.

§9 Om sammenhengen mellom Kripke B-modeller og halvsyntaktiske B -modeller

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom det vi tidligere kalte B-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke B-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke B-gyldig så er den også B-gyldig. Siden Teorem 7.6 sier at ethvert teorem i B er Kripke T-gyldig og vi tidligere har vist at enhver B-gyldig formel er et teorem i B (Teorem 6.6) følger det at enhver formel er Kripke B-gyldig hvis og bare hvis den er B-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at B er fullstendig med hensyn på Kripke B-gyldighet. Dette beviset har en litt annen struktur enn det som for eksempel er gitt i Hughes & Cresswell [1][5]

Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske B-modeller betegnes med |B|. Vi definerer på samme måte som i forrige paragraf en relasjon μ mellom B-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|B| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at B-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en B-modell betegner

5 Se Hughes & Cresswell [1], side 149 - 159.

© Morten Harboe Rognes 2008

Γ(m) den minste delmengden X av |B| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle B-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX. Vi gjør oppmerksom på at vi i det følgende lar I betegne identitetsrelasjonen. I er altså Mg(<x,y>: x=y). Er R en relasjon betegner Cnv(R) den konverse relasjonen til R, man kan også kalle denne relasjonen for omvendingen av R. Cnv(R) er definert ved:

Cnv(R) = Mg(<x,y>: <y,x>êR)

Vi definerer dessuten, om m er en B-modell, relasjonen R;m Inkl |B|X|B| ved å sette:

(+) R;m = (μ U Cnv(μ)U I) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er en refleksiv og symmetrisk relasjon over Γ(m) og at dersom <m;1,m;2>êR;m så har vi enten at m;1 er identisk med m,2, eller at m;2 er underordnet m;1 eller at m1 er underordnet m2. I tillegg må m;1,m,2 være med i Γ(m). La oss argumentere litt mer detaljert for at R;m definert på denne måten er refleksiv og symmetrisk. La oss først ta for oss refleksiviteten. Vi må vise at (Ax)(xêΓ(m) → <x,x>êR;m). Anta derfor for vilkårlig x at xêΓ(m). Da har vi åpenbart <x,x>êΓ(m)XΓ(m). Videre har vi:

<x,x> ê I Inkl (μ U Cnv(μ)U I) Inkl R;m. Fra disse to forhold følger <x,x>êR;m. Dessuten må vi vise at R er symmetrisk, med andre ord at

(Ax)(Ay)(<x,y>êR;m → <y,x>êR;m)

Anta derfor for vilkårlige x,y at <x,y>êR;m. Da har vi ved hjelp av definisjonen (+) at <x,y>ê(μ U Cnv(μ)U I) Ω (Γ(m)XΓ(m)). Er <x,y>êμ har vi åpenbart <y,x>êCnv(μ) og derfor <y,x>ê(μ U Cnv(μ)U I) Ω (Γ(m)XΓ(m)) =R;m. Er <x,y>êCnv(μ) har vi åpenbart <y,x>êμ og derfor <y,x>ê(μ U Cnv(μ)U I) Ω (Γ(m)XΓ(m)) =R;m. Er endelig <x,y>êI har vi, siden I er identitetsrelasjonen at <y,x>êI Inkl R;m. Dette viser at relasjonen R;m er symmetrisk.

Teorem 9.1 Anta m;0 er en B-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en B-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0). Fra det siste følger at vi enten har m=m' eller at m' er underordnet m eller at m er underurdnet m' Vi skiller derfor mellom tre tilfelle:

Tilfelle (i): m=m'. Siden m er en B- modell har vi at den oppfyller kravet:
(4) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;1(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;1(m). Men siden m=m' følger αêπ;1(m'). Dette er åpenbart det vi ønsker.

Tilfelle (ii): m' er underordnet m. Da har vi per definisjon at (5) π;2(m) Inkl π;1(m'). Siden m er en B-modell, og derfor en halvsyntaktisk modell, oppfyller den kravet:
(6) (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (3) følger αêπ;2(m). herav har vi så ved hjelp av (5) det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m').

Tilfelle (iii): m er underordnet m'. Da har vi at π;1(m') Inkl π;2(m). Anta for reduktio ad absurdum at (7) ¬(αêπ;1(m')). Da har vi siden m' er en B-modell og at π;1(m') følgelig er en sannhetsmengde at (8) (¬α)êπ;1(m'). Nå har vi B|- ¬α → L(¬L(α)). Vi har jo at α→LMα er et aksiomskjema i B. Siden m' er en B-modell må vi da ha at (¬α→L¬L(α))êπ;1(m'). Fra dette og (8) følger L(¬L(α))êπ;1(m'). Men siden π;1(m') Inkl π;2(m) følger at L(¬L(α))êπ;2(m). Dette innebærer at (¬L(α))êπ;1(m). Men siden π;1(m) er en sannhetsmengde om m er en B-modell må vi ha ¬(Lαêπ;1(m)) som åpenbart strider mot (3). Det følger at (7) er usann og at vi derfor har αêπ;1(m').

Dette viser at kondisjnalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

© Morten Harboe Rognes 2008

Siden <m,m'>êR;(m;0) ↔ m=m' v <m,m'>êμ v <m',m> følger fra dette at

(7) (Am')(m'ê|B| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(8) (Am')(m'ê|B| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en B-modell er π;2(m) lukket under B-konsekvens i henhold til Teorem 6.7. Fra dette forhold, (8) og Teorem 6.10 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en B-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at B-gyldighet er ekvivalent med Kripke B-gyldighet.

Teorem 9.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |B|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke B-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke B- modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en refleksiv og symmetrisk relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Videre skulle det være klart, når man studerer Definisjon 7.2 og definisjonen (iv) i teoremet, at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke B-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)

↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)

↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)

↔ αêπ;1(w)

(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:

<M,w> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,w> ⊨ β → <M,w> ⊨ γ)

↔ (βêπ;1(w) → γêπ;1(w)) (Etter induksjonshypotese)

↔ (β→γ)êπ;1(w) (π;1(w) er en sannhetsmengde)

↔ αêπ;1(w)

(iv) Er α = Lβ for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ Lβ ↔ (Aw')(w'êK & <w,w'>êR;(m;0) → <M,w'> ⊨ α)

↔ (Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) →αêπ;1(w')

Men i ved hjelp av Teorem 9.1 har vi:

© Morten Harboe Rognes 2008

(Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) → αêπ;1(w')) ↔ Lαêπ;1(w)
Det følger at <M,w> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(w).
Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 9.2 er det nå lett å vise:

Teorem 9.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke B-gyldig er α også B-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke B-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig B-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke B-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 9.2. Det vil si, sett per definisjon:
(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)
Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:
(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))
Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 9.2 at:
(3) (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w))) herav:
(4) <M,G> ⊨ α ↔ αêπ;1(G) ↔ αêπ;1(m;0)
Men α er etter (1) Kripke B-gyldig og M er en Kripke B-modell. Det følger da at <M,G> ⊨α. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i B er Kripke B-gyldig. Videre har vi fra Teorem 6.6 at enhver B-gyldig formel er et teorem i B. Fra dette og Teorem 9.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 9.4 En formel α i L er Kripke B-gyldig hvis og bare hvis den er B-gyldig.

Før vi fortsetter våre undersøkelser av systemene S4 og S5 har vi funnet det hensiktsmessig å skyte inn et avsnitt om egenskaper til den transitive lukning av en relasjon.

§10 Noen satser om den transtive lukning til en relasjon. R-induksjon

Anta R er en relasjon. Da defineres *den transitive lukningen til R*, som vi betegner med R*, ved:

Definisjon 10.1 <x,y>êR* ↔ (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → yêa)

Den transitive lukningen til en relasjon har de følgende egenskaper:

Teorem 10.2 Anta R er en relasjon. Da har vi:
(a) <x,y>êR* & <y,z>êR* → <x,z>êR*
(b) <x,y>êR & <y,z>êR* → <x,z>êR*
(c) <x,y>êR* & <y,z>êR → <x,z>êR*
(d) I Inkl R*
(e) R Inkl R*

Bevis: *(a)* Anta (1) <x,y>êR* & <y,z>êR* Fra den første konjunkten i (1) følger ved hjelp

© Morten Harboe Rognes 2008

av definisjonen av R*: (2) (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → yêa). Fra den andre konjunkten i (1) har vi på tilsvarende vis:

(3) (Aa)(yêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → zêa)

Vi skal vise <x,z>êR*. Anta derfor for vilkårlig a at: (4) xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). Fra dette og (2) følger åpenbart (5) yêa. Fra dette, den andre konjunkten i (4) og (3) har vi så zêa. Men a var et vilkårlig objekt slik at (4). Derfor:

(6) (Aa)(yêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → zêa)

Fra dette og definisjonen av R* følger så <x,z>êR*. Dette viser at (a) holder.

(b) Anta (1) <x,y>êR & <y,z>êR*. Fra den andre konjunkten følger (2) (Aa)(yêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → zêa). Vi skal vise <x,z>êR*. Anta derfor for vilkårlig a at (3) xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). Fra den første konjunkten i (1) og (3) følger da yêa. Dette sammen med (2) og den andre konjunkten i (3) impliserer så zêa. Siden a var et vilkårlig objekt slik at (3) har vi: (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → zêa) ved hjelp av definisjonen av R har vi derfor <x,z>êR*

(c) Anta (1) <x,y>êR* & <y,z>êR Fra den første konjunkten følger (2) (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → yêa). Vi skal vise <x,z>êR*. Anta derfor for vilkårlig a at (3) xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). Fra (2) og (3) følger yêa. Fra dette, den andre konjunkten i (1) og den andre konjunkten i (3) har vi åpenbart: zêa. Siden a var et vilkårlig objekt slik at (3) har vi: (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → zêa) ved hjelp av definisjonen av R har vi derfor <x,z>êR*.

(d) Anta <x,y>êI. Da har vi (1) x=y. Anta for vilkårlig a at (2) xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). Fra dette og (1) følger åpenbart xêa, og derfor yêa. Men a var et vilkårlig objekt. Følgelig: (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → yêa). Ved hjelp av definisjonen av R* følger <x,y>êR*.

(e) Anta (1) <x,y>êR for vilkårlige x,y. Vi ønsker å vise at <x,y>êR*. Anta derfor for vilkårlig a at (2) xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa) Fra (1), den første konjunkten i (2), samt den andre konjunkten i (2) følger yêa. Siden a var vilkårlig har vi derfor (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & vRw → wêa). → yêa). Ved hjelp av definisjonen av R* følger <x,y>êR*. Dette viser at punkt (d) holder

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 10.3 (R-induksjon). Anta R er en relasjon. Da gjelder:

(Ax)(Ay)(F(x) & <x,y>êR → F(y)) & F(x) → (Ay)(<x,y>êR* → F(y))

Bevis: Anta (1) (Ax)(Ay)(F(x) & <x,y>êR → F(y)) og (2) F(x). Anta for vilkårlig y at (3) <x,y>êR*. Ved hjelp av definisjonen av R* kan man da slutte:

(4) (Aa)(xêa & (Av)(Aw)(vêa & <v,w>êR → wêa). → yêa). Sett (5) x0 =Mg(x:F(x)). Ved å instansiere (4) med hensyn på x0 og benytte (5) får vi:

F(x) & (Av)(Aw)(F(v) & <v,w>êR → F(w)) → F(y). Men fra dette, (1) og (2) følger F(y). Nå var y et vilkårlig objekt slik at (3). Derfor (Ay)(<x,y>êR* → F(y)). **QED.**

Teorem 10.4 Anta R er en relasjon. Da har vi (Cnv(R))* = Cnv(R*)

Bevis: La x være et eller annet vilkårlig objekt. Ved hjelp av Teorem 10.2, punkt (b), har vi:

(1) (Az)(Aw)(<w,z>êR & <z,x>êR* → <w,x>êR*). Dette er åpenbart ekvivalent med: (2) (Az)(Aw)(<z,w>êCnv(R) & <z,x>êR* → <w,x>êR*). Dette er i sin tur ekvivalent med: (3) (Az)(Aw)(<z,x>êR* & <z,w>êCnv(R) → <w,x>êR*). La oss per definisjon sette: (4) G(r) ↔ <r,x>êR*. Da har vi fra (3) og (4) at:

© Morten Harboe Rognes 2008

(5) (Az)(Aw)(G(z) & <z,w>êCnv(R) → G(w))

Vi har I Inkl R*. Siden <x,x>êI følger <x,x>êR*. I lys av (4) har vi derfor (6) G(x). Fra (5) og (6) og prinsippet om R-induksjon, Teorem 10.3, følger derfor:

(7) (Ay)(<x,y>ê(Cnv(R))* → G(y)). I lys av definisjonen av G er dette ekvivalent med: (Ay)(<x,y>ê(Cnv(R))* → <y,x>êR*). Herav: (Ay)(<x,y>ê(Cnv(R))* → <x,y>êCnv(R*))

Det følger at (8) (Cnv(R))* Inkl Cnv(R*). Fra dette følger så:

(9) Cnv((Cnv(R))*) Inkl R*. Setter vi her inn "Cnv(R)" for "R" og noterer at Cnv(Cnv(R)) = R følger: (10) Cnv(R*) Inkl (Cnv(R))*. Fra (8) og (10) følger så det vi ønsker, nemlig: (Cnv(R))* = Cnv(R*). **QED.**

Dette avsnittet avsluttes med den følgende sats som vi har bruk for i avsnittet om systemet S5.

Teorem 10.5 Anta R er en relasjon. Da har vi:

(a) I Inkl ((RU Cnv(R))*)

(b) <x,y>ê(R U Cnv(R))* & <y,z>ê(R U Cnv(R))* → <x,z>ê(R U Cnv(R))*

(c) RUCnv(R) = Conv(RUConv(R))

(d) Cnv((RU Cnv(R))*) = (RUCnv(R))*

Bevis: Når det gjelder punktene (a) og (b) følger disse fra (b) og (d) i Teorem 10.2 ved å sette inn "RUCnv(R)" for alle forekomster av R.

Ad (c): Sett Q= RU Cnv(R). Vi viser at Q da er en symmetrisk relasjon. Anta for vilkårlige x,y at <x,y>êQ. da har vi enten <x,y>êR eller <x,y>Cnv(R). I det første tilfelle har vi <y,x>êCnv(R) og derfor <y,x>ê RUCnv(R) =Q. I det andre tilfelle har vi <y,x>êR og derfor

<y,x> êRUCnv(R) =Q. Dette viser at relasjonen RUCnv(R) er en symmetrisk relasjon. Vi viser nå at dersom Q er en symmetrisk relasjon har vi (1) Q=Cnv(Q). For anta Q er en symmtrisk relasjon. Anta <x,y>êQ for vilkårlige x,y. Da har vi siden Q er symmetrisk <y,x>êQ. Fra dette følger <x,y>êCnv(Q). Anta på den annen side for vilkårlige x,y at <x,y>êCnv(Q). Da har vi <y,x> êQ. Men siden Q er symmetrisk følger <x,y>êQ. Dette viser at (1) holder. Setter vi inn RU Cnv(R) for Q i (1) får vi det vi ønsker, nemlig: RUCnv(R) = Conv(RUConv(R)). Dette viser at (c) holder.

Ad (d): La oss sette Q=(R U Cnv(R)). Fra Teorem 10.4 har vi da

(2) (Cnv(Q))* = Cnv(Q*). Siden Q er en symmetrisk relasjon har vi Q=Cnv(Q). Fra dette og (2) følger Q* = Cnv(Q*). Dette er ekvivalent med Cnv(Q*) = Q*. Men siden Q=(R U Cnv(R)) må vi da ha Cnv((RU Cnv(R))*) = (RUCnv(R))*. Dette viser at (d) holder. **QED.**

§11 Om sammenhengen mellom Kripke S4-modeller og halvsyntaktiske S4 -modeller

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom det vi tidligere kalte S4-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke S4-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke S4-gyldig så er den også S4-gyldig. Siden Teorem 7.6 sier at ethvert teorem i S4 er Kripke S4-gyldig og vi tidligere har vist at enhver S4-gyldig formel er et teorem i S4 (Teorem 6.6) følger det at enhver formel er Kripke S4-gyldig hvis og bare hvis den er S4-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt fullstendighetsbevis for at S4 er fullstendig med hensyn på Kripke B-gyldighet. Dette beviset har en litt annen struktur enn det som for eksempel er gitt i Hughes & Cresswell

© Morten Harboe Rognes 2008

[1]

Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske S4-modeller betegnes med |S4|. Vi definerer på samme måte som i forrige paragraf en relasjon μ mellom S4-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|S4| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at S4-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en S4-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |S4| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle S4-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.
Vi definerer dessuten, om m er en S4-modell, relasjonen R;m Inkl |S4|X|S4| ved å sette:

(+) R;m = (μ*) Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er den transitive lukningen av μ. Den er derfor en refleksiv og transitiv relasjon over Γ(m) og oppfyller følgelig de krav man stiller til relasjonen i en Kripke S4-modell. At μ* er refleksiv og transitiv følger umiddelbart fra Teorem 10.2, punkt (a) og (d).

Teorem 11.1 Anta m;0 er en S4-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en S4-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og (4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) for vilkårlig m'. Fra det siste følger at at (5) mμ*m' . Det vil nå være tilstrekkelig å vise at (+) Lαêπ;1(m'). Dette skjer ved R-induksjon i overenstemmelse med prinsippet i Teorem 10.3. Sett per definisjon (6) G(m) = (Lα)êπ;1(m). Det vil da være tilstrekkelig å vise (7) G(m) og (8) (Am')(Am")(G(m') & m'μm" → G(m")). I lys av definisjonen av G har vi at G(m) er ekvivalent med (Lα)êπ;1(m). (7) holder derfor åpenbart fordi det bare dreier seg om en reformulering av (3). (8) er åpenbart, i lys av (6), ekvivalent med: (9) (Am')(Am")(Lαêπ;1(m') & m'μm" → Lαêπ;1(m")). La oss vise at (9) holder: Anta for vilkårlige m', m" at (10) Lαêπ;1(m') & m'μm". Fra den siste konjunkten i (10) følger at
(11) π;2(m') Inkl π;1(m"). Nå har vi S4|- Lα→LLα. Siden alle S4-teoremer er S4-gyldige og m' er en S4-modell følger det at (Lα→LLα)êπ;1(m'). Fra dette følger sammen med den første konjunkten i (10), siden π;1(m') er en sannhetsmengde, at (LLα)êπ;1(m'). Men siden m' er en S4-modell følger Lαêπ;2(m'). Fra dette og (11) har vi så Lαêπ;1(m"). Dette viser at (9) holder.

Det følger fra det vi nå har vist at (+) holder. Men m' er en S4-modell og vi har derfor at (Lα→α)êπ;1(m'). Fra dette og (+) følger så αêπ;1(m'). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for kondisjonalen mot høyre i satsen.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(12) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Siden R;m = (μ*) Ω (Γ(m)XΓ(m)) og vi har ved hjelp av Teorem 10.2 at μ Inkl μ* følger:

(13) (Am')(m'ê|S4| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(14) (Am')(m'ê|S4| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en S4-modell er π;2(m) lukket under S4-konsekvens i henhold til Teorem 6.7. Fra dette forhold, (8) og Teorem 6.10 kan vi slutte at (9) αêπ;2(m). Men siden m er en S4-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (9) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at S4-gyldighet er ekvivalent med Kripke S4-gyldighet.

Teorem 11.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |S4|. Sett per definisjon:
(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)
Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:
(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))
Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:
(a) M er en Kripke S4-modell
(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:
(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke S4 - modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en refleksiv og transitiv relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Videre skulle det være klart, når man studerer Definisjon 7.2 og definisjonen (iv) i teoremet, at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke S4-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at
<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)
(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:
<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)
↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)
↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(w)
(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:
<M,w> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,w> ⊨ β → <M,w> ⊨ γ)
↔ (βêπ;1(w) → γêπ;1(w)) (Etter induksjonshypotese)
↔ (β→γ)êπ;1(w) (π;1(w) er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(w)
(iv) Er α = Lβ for en eller annen formel β har vi:
<M,w> ⊨ Lβ ↔ (Aw')(w'êK & <w,w'>êR;(m;0) → <M,w'> ⊨ α)
↔ (Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) →αêπ;1(w')
Men i ved hjelp av Teorem 11.1 har vi:
(Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) → αêπ;1(w')) ↔ Lαêπ;1(w)
Det følger at <M,w> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(w).
Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 11.2 er det nå lett å vise:

Teorem 11.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke S4-gyldig er α også S4-gyldig.

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke S4-gyldig. Anta nå at (2)

© Morten Harboe Rognes 2008

m;0 er en vilkårlig S4-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke S4-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 11.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 9.2 at:

(3) (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w))) herav:
(4) <M,G> ⊨ α ↔ αêπ;1(G) ↔ αêπ;1(m;0)

Men α er etter (1) Kripke S4-gyldig og M er en Kripke S4-modell. Det følger da at <M,G> ⊨α. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i S4 er Kripke B-gyldig. Videre har vi fra Teorem 6.6 at enhver S4-gyldig formel er et teorem i S4. Fra dette og Teorem 11.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 11.4 En formel α i L er Kripke S4-gyldig hvis og bare hvis den er S4-gyldig.

§12 Om sammenhengen mellom Kripke S5-modeller og halvsyntaktiske S5 -modeller

Vi skal nå gå nærmere inn på sammenhengen mellom det vi tidligere kalte S5-modeller og den type modeller som har blitt definert i forrige paragraf, nemlig Kripke S5-modeller. Vårt viktigste resultat i dette avsnittet er at dersom en formel α er Kripke S5-gyldig så er den også S5-gyldig. Siden Teorem 7.6 sier at ethvert teorem i S5 er Kripke S5-gyldig og vi tidligere har vist at enhver S5-gyldig formel er et teorem i S5 (Teorem 6.6) følger det at enhver formel er Kripke S5-gyldig hvis og bare hvis den er S5-gyldig. De to gyldighetsbegrepene faller derfor sammen. Sammen med vårt tidligere fullstendighetsbevis gir resultatene i dette avsnittet en også et nytt bevis for at S5 er fullstendig med hensyn på Kripke B-gyldighet. Vi minner om at mengden av alle halvsyntaktiske S5-modeller betegnes med |S5|. Vi definerer på samme måte som i forrige paragraf en relasjon μ mellom S5-modeller ved å sette at <m,m'>êμ hvis og bare hvis m,m' ê|S5| og vi dessuten har at π;2(m) Inkl π;1(m'). Holder <m,m'>êμ sier vi at S5-modellen m' *er underordnet* modellen m. Er m en S5-modell betegner Γ(m) den minste delmengden X av |S5| der vi har at mêX og hvor vi dessuten har for alle S5-modeller m,m' at dersom mêX og m' er underordnet m så er også m'êX.

Vi definerer dessuten, om m er en S5-modell, relasjonen R;m Inkl |S5|X|S5| ved å sette:

(+) R;m = (μUCnv(μ))* Ω (Γ(m)XΓ(m))

Man ser fra dette at R;m er den transitive lukningen av μUCnv(μ). Den er derfor en refleksiv, symmetrisk og transitiv relasjon over Γ(m). Dette fremgår fra Teorem 10.5. R;m oppfyller følgelig de krav man stiller til relasjonen i en Kripke S5-modell.

Teorem 12.1 Anta m;0 er en S5-modell. Anta videre at mêΓ(m;0). Da har vi
Lαê π;1(m) ↔ (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Bevis: Anta (1) at m;0 er en S5-modell og (2) mêΓ(m;0).

(a) Vi gir først et bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor (3) Lαêπ;1(m) og

© Morten Harboe Rognes 2008

(4) m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) for vilkårlig m'. Fra det siste følger at at
(5) m(μ UCnv(μ))*m' . Det vil nå være tilstrekkelig å vise at (+) Lαêπ;1(m'). Dette skjer ved R-induksjon i overenstemmelse med prinsippet i Teorem 10.3. Sett per definisjon (6) G(m) = (Lα)êπ;1(m). Det vil da være tilstrekkelig å vise

(7) G(m) og

(8) (Am')(Am")(G(m') & m' (μUCnv(μ)) m" .→ G(m")).

I lys av definisjonen av G har vi at G(m) er ekvivalent med (Lα)êπ;1(m). (7) holder derfor åpenbart fordi det bare dreier seg om en reformulering av (3). (8) er åpenbart, i lys av (6), ekvivalent med:

(9) (Am')(Am")(Lαêπ;1(m') & m' (μUCnv(μ)) m" → Lαêπ;1(m")).

La oss vise at (9) holder: Anta for vilkårlige m', m" at (10) Lαêπ;1(m') & m'(μUCnv(μ)) m".

Vi skiller mellom to tilfelle alt ettersom vi har m' μ m" eller m' Cnv(μ) m"

Tilfelle (i): (11) m' μ m". Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av μ at (11) π;2(m') Inkl π;1(m"). Nå har vi S5|- Lα→LLα. Siden alle S5-teoremer er S5-gyldige og m' er en S5-modell følger det at (Lα→LLα)êπ;1(m'). Fra dette følger, sammen med den første konjunkten i (10), siden π;1(m') er en sannhetsmengde, at (LLα)êπ;1(m'). Men siden m' er en S5-modell følger Lαêπ;2(m'). Fra dette og (11) har vi så Lαêπ;1(m"). Dette viser at (9) holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): (12) m' Cnv(μ) m". Da har vi (13) m" μ m'. Anta for reduktio ad absurdum at (#) ¬(Lαêπ;1(m")). Siden m" er en S5-modell er π;1(m") en sannhetsmengde. Vi har derfor at (14) (¬Lα)êπ;1(m"). Siden ¬Lα → ¬LLα er et teorem i S5 har vi (¬Lα→¬LLα)êπ;1(m"). Sammen med (14) gir dette en: (15) (¬LLα)êπ;1(m"). Nå har man at ¬Lβ → L¬Lβ er et teorem i S5 for alle formler β. Det følger at ¬LLα → L¬LLα er et teorem i S5 og derfor at (16) (¬LLα→ L¬LLα)êπ;1(m"). Fra dette og (15) kan man slutte (17) (L¬LLα)êπ;1(m"). Fra (13) og definisjonen av μ følger at (18) π;2(m") Inkl π;1(m'). Fra (17) følger (¬LLα)êπ;2(m"). herav har vi ved hjelp av (18): (¬LLα)êπ;1(m'). Men vi har at Lα→LLα er et aksiom i S5. Det følger at ¬LLα → ¬Lα er et teorem i S5. Siden m' er en S5-modell må vi derfor ha (¬LLα→¬Lα)êπ;1(m'). Dette og (18) gir en (¬Lα)êπ;1(m') og derfor ¬(Lαêπ;1(m')). Dette strider imidlertid mot den første konjunkten i (10). Det følger derfor at (#) er usann. Følgelig Lαêπ;1(m").

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (9).

Det følger fra det vi nå har vist at (+) holder. Men m' er en S5-modell og vi har derfor at (Lα→α)êπ;1(m'). Fra dette og (+) følger så αêπ;1(m'). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for kondisjonalen mot høyre i satsen.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(19) (Am')(m'êΓ(m;0) & <m,m'>êR;(m;0) → αêπ;1(m'))

Siden R;m = ((μ UCnv(μ))*) Ω (Γ(m)XΓ(m)) og vi har ved hjelp av Teorem 10.2 at μ Inkl μ UCnv(μ) Inkl (μ UCnv(μ))* følger:

(20) (Am')(m'ê|S5| & <m,m'>êμ → αêπ;1(m')) Dette innebærer i sin tur at

(21) (Am')(m'ê|S5| & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m'))

Men siden m er en S5-modell er π;2(m) lukket under S5-konsekvens i henhold til Teorem 6.7. Fra dette forhold, (21) og Teorem 6.10 kan vi slutte at (22) αêπ;2(m). Men siden m er en S5-modell oppfyller den kravet: (Aβ)(βêFm(L) → (Lβêπ;1(m) ↔ βêπ;2(m))). Fra dette og (22) følger derfor det vi ønsker: Lαêπ;1(m).

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2008

Det neste teoremet er avgjørende for å kunne vise at S5-gyldighet er ekvivalent med Kripke S5-gyldighet.

Teorem 12.2 Anta m;0 er et vilkårlig element i |S5|. Sett per definisjon:

(i) G= m;0

(ii) K= Γ(m;0) og

(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi:

(a) M er en Kripke S5-modell

(b) Er da α en vilkårlig formel i L har vi:

(Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)))

Bevis: (a) Det skulle være temmelig opplagt at <G,K,R> er en Kripke S5 - modellstruktur. Man har at G=m;0êΓ(m;0)=K i lys av definisjonen av operasjonen Γ. Videre skulle det være klart at R;(m;0) er en refleksiv, symmetrisk og transitiv relasjon over K=Γ(m;0) i lys av definisjonen av R;m. Videre skulle det være klart, når man studerer Definisjon 7.2 og definisjonen (iv) i teoremet, at φ er en verditilordning assosiert med strukturen <G,K,R>. Det følger derfor at M=<φ,G,K,R> er en Kripke S5-modell.

(b) Vi beviser dette ved induksjon på lengden av formler i L. Anta w er et vilkårlig element i K. Da har vi wêΓ(m;0).

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,w> ⊨ α ↔ <M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,w> ⊨ β)

↔ ¬(βêπ;1(w)) (Her benytter vi induksjonshypotesen)

↔ (¬β)êπ;1(w) (Siden π;1(w) er en sannhetsmengde)

↔ αêπ;1(w)

(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:

<M,w> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,w> ⊨ β → <M,w> ⊨ γ)

↔ (βêπ;1(w) → γêπ;1(w)) (Etter induksjonshypotese)

↔ (β→γ)êπ;1(w) (π;1(w) er en sannhetsmengde)

↔ αêπ;1(w)

(iv) Er α = Lβ for en eller annen formel β har vi:

<M,w> ⊨ Lβ ↔ (Aw')(w'êK & <w,w'>êR;(m;0) → <M,w'> ⊨ α)

↔ (Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) →αêπ;1(w')

Men i ved hjelp av Teorem 11.1 har vi:

(Aw')(w'êΓ(m;0) & <w,w'>êR;(m;0) → αêπ;1(w')) ↔ Lαêπ;1(w)

Det følger at <M,w> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(w).

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. **QED.**

Ved hjelp av Teorem 11.2 er det nå lett å vise:

Teorem 12.3 Anta α er en formel i L. Er da α Kripke S5-gyldig er α også S5-gyldig.

© Morten Harboe Rognes 2008

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L. Anta (1) at α er Kripke S5-gyldig. Anta nå at (2) m;0 er en vilkårlig S5-modell. Det vil vil være tilstrekkelig å bevise at αêπ;1(m;0). Definer en Kripke S5-modell M=<φ, G,K,R> på nøyaktig samme måte som i Teorem 11.2. Det vil si, sett per definisjon:

(i) G= m;0
(ii) K= Γ(m;0) og
(iii) R = R;(m;0)

Definer en funksjon φ der domenet til φ er mengden av setningsvariabler i L ved:

(iv) φ(p) = Mg(m: mêΓ(m;0) & pêπ;1(m))

Sett tilslutt (v) M= <φ, G,K,R>. Da har vi i lys av Teorem 9.2 at:

(3) (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w))) herav:
(4) <M,G> ⊨ α ↔ αêπ;1(G) ↔ αêπ;1(m;0)

Men α er etter (1) Kripke S5-gyldig og M er en Kripke S5-modell. Det følger da at <M,G> ⊨α. Fra dette og (4) følger det vi ønsker, nemlig: αêπ;1(m;0). **QED.**

Vi har tidligere nevnt at ethvert teorem i S5 er Kripke B-gyldig. Videre har vi fra Teorem 6.6 at enhver S5-gyldig formel er et teorem i S5. Fra dette og Teorem 11.3 følger da vårt hovedresultat:

Teorem 12.4 En formel α i L er Kripke S5-gyldig hvis og bare hvis den er S5-gyldig.

Dette avslutter vår analyse av forholdet mellom halvsyntaktiske S5-modeller og den vanlige typen av modeller for S5, nemlig Kripke S5-modeller.

Våre undersøkelser av de normale modalsystemene T, B, S4 og S5 er nå i alt vesentlig brakt til sin avslutning. Imidlertid skal vi helt tilslutt tillate oss å formulere en konsekvens av resultatene ovenfor. Det dreier seg om følgende sats:

Teorem 12.5 Anta Δ er en formelmengde i L som er konsistent med hensyn på T (B,S4,S5). Da finnes det en Kripke T (B, S4, S5)-modell M= <φ,G,K,R> slik at

(Aα)(αêΔ → <M,G> ⊨ α)

Bevis: Anta Δ er en en formelmengde som er konsistent med hensyn på T T (B,S4,S5). Ved hjelp av Teorem 6.5 kan man da slutte at det finnes en T (B,S4, S5) -modell m;0 som er slik at (1) (Aα)(αêΔ → αêπ;1(m;0)). Vi kan da for hvert system definere Γ(m;0) slik vi har gjort i bevisene i §8,§9, §11 og §12 og dernest en alternativrelasjon R;(m;0) slik det har blitt vist. Vi definerer så G, K,R og φ slik som i Teorem 8.3 (9.3, 11.3 og 12.3). Da vil M=<φ,G,K,R> være en Kripke T (B, S4, S5)-modell. Ved hjelp av Teorem 8.2 (9.2, 11.2, 13.2) ser man da at vi har for enhver formel β: (Aw)(wêK → (<M,w> ⊨ β ↔ βêπ;1(w))). Siden G= m;0 følger fra dette at (Aα)(αêΔ →<M,w> ⊨ α ↔ αêπ;1(w)). Men fra dette og (1) følger det vi ønsker, nemlig (Aα)(αêΔ → <M,G> ⊨α). **QED.**

Vi setter sluttstreken her.

© Morten Harboe Rognes 2008

Referanser

Hughes & Cresswell [1] Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen and Co Ltd

Kripke [1] normal *Logik und* Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 -96

© Morten Harboe Rognes 2008